本書の特長と利用法

1. 見出しの意味

＊書名の「解法のセオリー」とは，問題に合わせて必要な定理，公式，考え方からなる，下記の 指 針 ，「定石」を含む「解き方の基本」全体を指します．

指 針　【解答】にたどり着くまでの考え方，着眼点，発想．

★（定石）問題を解くうえで最善の考え方，定理・公式の運用方法．

【解答】　セオリーに則った解法を反映した解答例．

別解　セオリーに則った解法を用いた異なる解答例．

参考　やや難度の高い応用的，発展的な解法の解説，紹介など．

補足 注　【解答】の理解を助ける説明．

> 「定石」とは，囲碁や将棋において，「このような状況ではこうするのが最善の策である」という石（駒）の置き方のことを指します．入試数学においても，この「定石」がたくさんあります．

2. 特に意識したことは，次の 3 点です．

(1) 合否を左右し，かつ，重要な定石を 200 問程度で学べるようにする．

(2) 入試数学に必要な「解法のセオリー」≒「定石」を可能な限り多く提示する．

(3) 解説はとことん詳しくする．

3. 心がけたこと

(1) 1 つの考え方に対して多数の問題を対応させること．

これは私が授業でも常に意識していることです．一般的には「1 つの問題に対して 1 つの解答（解き方・考え方）」，つまり 1 対 1 対応であることが多いようです．そうせざるを得ない問題ももちろんありますが，できるだけ 1 対多対応させることで，多くの問題に対処できるようにしています．効率よく定石を身につけられるようにするため，掲載している問題は入試問題をそのまま採用しているもの以外に，改題したものや，本書用に作った問題も含まれます．

(2) 解答に至る考え方である 指 針 を明確にすること．

【解答】はできるだけ詳しくしてありますが， 指 針 の解説部分を手厚くすることで，問題のタイプ分け，解法のタイプ分けを学べるようにしています．そしてさらには，どの問題にどの解法を適応させるのがよいのか，何が解法として必然なのかを示し，疑問点を残さないようにしています．

4. 有効な学習法

(1)　入試数学の「セオリー」を把握し，「定石」を学び，覚える．

問題を解いて答え合わせをするだけではなく，指 針 を読み込み，入試数学における「定石」(★) を学んでいってください．

本書は，数学の定理・公式は覚えてはいるがその運用方法が分かっていない人に対して，「頭の中のどの引き出しからどの道具を引っ張ってくればいいのか」という，問題に対峙した時の効率の良い思考回路を提示するものとなります．その思考回路の１つ１つが「定石」となります．

(2)　問題に応じた「セオリー」「定石」の使い方を会得する．

各分野の問題ごとに，問題のテーマを表すタイトルをつけています．同じタイトルの問題や，それぞれの 指 針 の中に同じ「定石」が記されていることが続くこともあります（第２章の「積分方程式」など）．

これは次の理由によります．

①１つのテーマに対して複数の「定石」があり，見た目は似ていても用いる「定石」が異なる場合があります．そのような場合にはそのテーマの「定石」を網羅できるように問題を多めに載せてあります．そして同時にどの「定石」を使えばよいかの見分け方を提示しています．

②異なる章の問題でも，ほかの章で用いた「定石」が登場する箇所が複数あります．問題の見た目は違っていても，その解答作成の中盤以降の対処方法が同じであること，同じになることは入試数学ではよくあることです．その繋がりを感じられるのが本書の醍醐味でもあります．是非その域にたどりつき，問題を解く楽しみを味わってほしいと思っています．

③本書は第１章から第７章までで全分野をカバーしていますが，特別章に該当する第８章があります．ここには，第１～３章等の関連事項である「存在条件」と，第６章の関連事項である「合同式」の番外講義とも言える内容を掲載しました．指 針 には書ききれない詳細な内容を記しましたので，是非読んで，取り組んでみてください．指 針 の部分に該当する問題が記されています．

もくじ

第5章 場合の数・確率（29題） 253

第6章 数列・整数（37題） 315

第7章 指数・対数・三角関数（26題） 381

第8章 さらなる理解のために 427

【解答】

(1) $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$

であり，「$x+y+z=0$ かつ $xy+yz+zx=0$」より，

$x^2+y^2+z^2=0$

よって，x，y，z は実数より，

$x=y=z=0$ 終

(2) $x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

であり，「$x+y+z=0$ かつ $x^3+y^3+z^3=0$」より，

$-3xyz=0 \quad \therefore\ xyz=0$

よって，x，y，z のうち少なくとも1つは0である．終

(3) $x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

$=(x+y+z)\cdot\dfrac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}$

ここで，$xyz=0$ であると仮定すると，

背理法を用いる．
「x，y，z のどれも0ではない」の否定は，
「x，y，z の少なくとも1つは0」
$\Longleftrightarrow$「$xyz=0$」

$x^3+y^3+z^3=0$ と合わせて，

$0=(x+y+z)\cdot\dfrac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}$

$x+y+z\neq0$ より，

$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0$

x，y，z は実数より，$x=y=z$

これと，$x^3+y^3+z^3=0$ より，$x=y=z=0$ となるが，これは $x+y+z\neq0$ であることに矛盾．

よって，$xyz\neq0$ であるから，x，y，z のどれも0ではない．終

21 不等式の証明

(1) $a\geqq b$，$x\geqq y$ のとき，$(a+2b)(x+2y)\leqq3(ax+2by)$ を示せ．

(岡山県立大)

(2) $a>0$，$b>0$ のとき，$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right)$ の最小値を求めよ．

(立教大)

(3) 実数 x，y，z の間に $x+2y+3z=7$ という関係があるとき，$x^2+y^2+z^2$ の最小値を求めよ．

(早稲田大)

指針

不等式の証明問題では，

★不等式の証明

$A \geqq B$ を証明する場合，

①　$A - B \geqq 0$ を示す．

→ $(\quad)^2 + (\quad)^2 + (\quad)^2 + \cdots$

→ 因数分解（不等式の条件が与えられているとき）

②　$A \geqq 0$，$B \geqq 0$ の場合は，

$A^2 \geqq B^2$ すなわち，$A^2 - B^2 \geqq 0$ を示す．

③　有名不等式の利用

に従って考えていくのが基本です．③の有名不等式に関しては，

・相加相乗平均の不等式

・コーシー・シュワルツの不等式

・三角不等式（三角形の成立条件）

・凸不等式

グラフの凸性を利用して作られる不等式．理系はできればここまで押さえておきたい．

辺りを押さえておきましょう．

(1)　(右辺)−(左辺)≧0を示します．$a \geqq b$，$x \geqq y$ と不等式の条件があるので，因数分解することを考えましょう．

(2)は相加相乗平均の不等式，(3)はコーシー・シュワルツの不等式が利用できます．

★相加平均・相乗平均の不等式

$a > 0$，$b > 0$ のとき

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$

(和) ≧ 2√(積)

（実際は，$a + b \geqq 2\sqrt{ab}$ の形で使うことが多い）

等号は，$a = b$ のときに成立する．

★コーシー・シュワルツの不等式

①　a，b，x，y が実数のとき

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geqq (ax + by)^2$$

いずれも，(2乗の和の積) ≧ (積の和)^2

（等号は，$abxy \fallingdotseq 0$ の場合，$a : b = x : y$ のときに成立）

②　a，b，c，x，y，z が実数のとき

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geqq (ax + by + cz)^2$$

（等号は，$abcxyz \fallingdotseq 0$ の場合，$a : b : c = x : y : z$ のときに成立）

ただし，(2)(3)はいずれも不等式の証明問題ではなく，最小値を求める問題です．

相加相乗やコーシー・シュワルツで最大値や最小値を
求める問題では，必ず等号成立条件を述べる

ようにしてください．例えば，y の最小値が 10 であったとしても，「$y \geqq 9$」は成り立ってしまうので，

$$「y \geqq 9」 \Longrightarrow 「y \text{の最小値が} 9」$$

は偽です．$y \geqq 9$ で最小値が 9 であることを保証するためには，等号成立条件が必須なのです．

また，コーシー・シュワルツの不等式の証明自体も，よく出題されます．不等式証明のよい練習になるので，必ず各自挑戦してみてください．①②いずれも，(左辺)－(右辺)を$(\quad)^2$，あるいはその和の形に変形し，0 以上であることを示します（補足参照）．

【解答】

(1)
$$\begin{aligned}
&(\text{右辺})-(\text{左辺})\\
&=3(ax+2by)-(a+2b)(x+2y)\\
&=3ax+6by-(ax+2ay+2bx+4by)\\
&=2(ax-ay-bx+by)\\
&=2(a-b)(x-y) \geqq 0
\end{aligned}$$

($a \geqq b$，$x \geqq y$ より，$a-b \geqq 0$，$x-y \geqq 0$)

よって，(左辺)≦(右辺)　終

注　不等式証明の問題では，等号成立条件を問われていなければ述べなくてもよい．もし本問で問われている場合は，等号が成り立つのは，

$$a-b=0 \text{ または } x-y=0$$
$$\therefore \quad a=b \text{ または } x=y$$

のときとなる．

(2)
$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{4}{a}\right)=ab+\frac{4}{ab}+5$$

ここで，$a>0$，$b>0$ より，$ab>0$，$\dfrac{4}{ab}>0$ であるから，相加相乗平均の不等式より，

$$ab+\frac{4}{ab} \geqq 2\sqrt{ab\cdot\frac{4}{ab}}=4$$

等号は，

$$ab=\frac{4}{ab}=2$$

$$\left\{\begin{aligned} &ab=\frac{4}{ab}\\ &ab+\frac{4}{ab}=4 \end{aligned}\right.$$
より，$ab=\dfrac{4}{ab}=2$

より，$ab=2$ のときに成立．

よって，求める最小値は，

$4+5=9$　答

(3)　コーシー・シュワルツの不等式

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$$

において，$a=1$，$b=2$，$c=3$ とすると，

$$(1^2+2^2+3^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (x+2y+3z)^2$$

$x+2y+3z=7$ より，

$$14(x^2+y^2+z^2) \geqq 7^2$$
$$\therefore \quad x^2+y^2+z^2 \geqq \frac{7^2}{14}=\frac{7}{2}$$

等号は，$x:y:z=1:2:3$ より，$x=k$，$y=2k$，$z=3k$ とおくと，$x+2y+3z=7$ より，

$$k+2\cdot2k+3\cdot3k=7 \qquad \therefore \quad k=\frac{1}{2}$$

よって，$(x,\ y,\ z)=\left(\dfrac{1}{2},\ 1,\ \dfrac{3}{2}\right)$のときに成立．

したがって，求める最小値は，$\dfrac{7}{2}$　答

参考1

1文字消去により，独立2変数関数の最小値問題として考えてもよいが，計算量は多い．

$x = 7 - 2y - 3z$　… ①

より，

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= (7 - 2y - 3z)^2 + y^2 + z^2 \\ &= 5y^2 + (12z - 28)y + 10z^2 - 42z + 49 \\ &= 5\left(y + \frac{6z - 14}{5}\right)^2 - \frac{(6z - 14)^2}{5} + 10z^2 - 42z + 49 \\ &= 5\left(y + \frac{6z - 14}{5}\right)^2 + \frac{14z^2 - 42z + 49}{5} \\ &= 5\left(y + \frac{6z - 14}{5}\right)^2 + \frac{14}{5}\left(z - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{2} \end{aligned}$$

よって，「$y = -\frac{6z - 14}{5}$ かつ $z = \frac{3}{2}$」，また①も考慮すると，

$$(x,\ y,\ z) = \left(\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2}\right)$$

のとき，求める最小値は，$\frac{7}{2}$　答

参考2

$(x,\ y,\ z) \neq (0,\ 0,\ 0)$ より，$k \neq 0$

xyz 空間において，$x + 2y + 3z = 7$ が平面の方程式，$x^2 + y^2 + z^2 = k$（$k > 0$）が球面の方程式を表すことを知っていれば，共有点条件に帰着することも可能．

$x^2 + y^2 + z^2 = k$ とおくと，k の値域は，

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = k & \cdots ① \\ x + 2y + 3z = 7 & \cdots ② \end{cases}$$

を満たす実数 x，y，z が存在するような k の条件として与えられる．

①は原点中心，半径 $\sqrt{k}$ の球面，②は平面を表し，原点と平面②との距離は，

$$\frac{|-7|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

点と平面の距離公式

したがって，球面①と平面②が共有点をもつ条件を考えて，

$$\frac{\sqrt{14}}{2} \leqq \sqrt{k} \qquad \therefore\ k \geqq \frac{7}{2}$$

よって，求める最小値は，$\frac{7}{2}$　答

補足　コーシー・シュワルツの不等式の証明

①　(左辺) − (右辺)

$$\begin{aligned} &= (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - (ax + by)^2 \\ &= (a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2) - (a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2) \end{aligned}$$