

本書の特長と利用法

1. 見出しの意味

* 書名の「解法のセオリー」とは、問題に合わせて必要な定理、公式、考え方からなる、下記の**指針**、「定石」を含む「解き方の基本」全体を指します。

指針 【解答】にたどり着くまでの考え方、着眼点、発想。

★(定石) 問題を解くうえで最善の考え方、定理・公式の運用方法。

【解答】 セオリーに則った解法を反映した解答例。

別解 セオリーに則った解法を用いた異なる解答例。

参考 やや難度の高い応用的、発展的な解法の解説、紹介など。

補足 注 【解答】の理解を助ける説明。

「定石」とは、囲碁や将棋において、「このような状況ではこうするのが最善の策である」という石（駒）の置き方のことを指します。入試数学においても、この「定石」がたくさんあります。

2. 特に意識したことは、次の3点です。

- (1) 合否を左右し、かつ、重要な定石を200問程度で学べるようにする。
- (2) 入試数学に必要な「解法のセオリー」≡「定石」を可能な限り多く提示する。
- (3) 解説はとことん詳しくする。

3. 心がけたこと

- (1) 1つの考え方に対して多数の問題を対応させること。

これは私が授業でも常に意識していることです。一般的には「1つの問題に対して1つの解答（解き方・考え方）」、つまり1対1対応であることが多いようです。そうせざるを得ない問題ももちろんありますが、できるだけ1対多対応させることで、多くの問題に対処できるようにしています。効率よく定石を身につけられるようにするため、掲載している問題は入試問題をそのまま採用しているもの以外に、改題したものや、本書用に作った問題も含まれます。

- (2) 解答に至る考え方である**指針**を明確にすること。

【解答】はできるだけ詳しくしてありますが、**指針**の解説部分を手厚くすることで、問題のタイプ分け、解法のタイプ分けを学べるようにしています。そしてさらには、どの問題にどの解法を適応させるのがよいのか、何が解法として必然なのかを示し、疑問点を残さないようにしています。

4. 有効な学習法

(1) 入試数学の「セオリー」を把握し、「定石」を学び、覚える.

問題を解いて答え合わせをするだけではなく、**指針**を読み込み、入試数学における「定石」(★)を学んでいってください.

本書は、数学の定理・公式は覚えてはいるがその運用方法が分かっていない人に対して、「頭の中のどの引き出しからどの道具を引っ張ってあげればいいのか」という、問題に対峙した時の効率の良い思考回路を提示するものとなります。その思考回路の1つ1つが「定石」となります.

(2) 問題に応じた「セオリー」「定石」の使い方を会得する.

各分野の問題ごとに、問題のテーマを表すタイトルをつけています。同じタイトルの問題や、それぞれの**指針**の中に同じ「定石」が記されていることが続くこともあります(第2章の「積分方程式」など).

これは次の理由によります.

- ① 1つのテーマに対して複数の「定石」があり、見た目は似ていても用いる「定石」が異なる場合があります。そのような場合にはそのテーマの「定石」を網羅できるように問題を多めに載せてあります。そして同時にどの「定石」を使えばよいかの見分け方を提示しています.
- ② 異なる章の問題でも、ほかの章で用いた「定石」が登場する箇所が複数あります。問題の見た目は違っていても、その解答作成の中盤以降の対処方法が同じであること、同じになることは入試数学ではよくあることです。その繋がりを感じられるのが本書の醍醐味でもあります。是非その域にたどりつき、問題を解く楽しみを味わってほしいと思っています.
- ③ 本書は第1章から第7章までで全分野をカバーしていますが、特別章に該当する第8章があります。ここには、第1～3章等の関連事項である「存在条件」と、第6章の関連事項である「合同式」の番外講義とも言える内容を掲載しました。**指針**には書ききれない詳細な内容を記しましたので、是非読んで、取り組んでみてください。**指針**の部分に該当する問題が記されています.

もくじ

はじめに 2 本書の特長と利用法 4

第1章 2次関数・数と式 (32 題) 9

1 2 文字定数入り2次関数の最大最小 3 4 5 6 不等式の成立条件
 7 不等式の成立条件, 同次式 8 9 10 2変数関数の最大最小 11 連立方程
 式の解の存在 12 13 14 2次方程式の解の配置 15 方程式の解の条件
 16 共通解 17 全称と存在 18 絶対値入り不等式 19 比例式 20 条件
 の等式化 21 23 不等式の証明 22 等式・不等式の証明 24 多項式の除法
 25 3次方程式の解と係数の関係 26 27 3次方程式の解の条件 28 4次方程式
 の解の条件 29 相反方程式 30 ω の性質 31 32 関数方程式

第2章 微分・積分 (31 題) 75

1 3次関数の極値 2 極値に関する条件 3 極大値と極小値の和 4 極
 大値と極小値の差 5 図形量の最大最小 6 7 文字定数入り3次関数の最大最
 小 8 対称式で表された関数 9 3次方程式の解の条件 10 存在条件の利用
 11 12 接線の本数 13 2曲線が接する 14 不等式の成立条件 15 放物線で
 囲まれた面積 16 共通接線 17 3次関数のグラフと接線 18 複接線
 19 20 21 面積の最大最小 22 面積の和の最小値 23 面積が等しくなる条件
 24 25 26 27 28 積分方程式 29 30 31 定積分で表された関数

第3章 図形と方程式 (21 題) 131

1 2 折れ線の長さの最小値 3 図形に関する存在条件 4 円と直線の位置関
 係 5 2円の交点を通る図形 6 2円の位置関係, 共通接線 7 19 20 図形
 量の最大最小 8 9 中点の軌跡 10 交点の軌跡 11 反転 12 13 14 領
 域と最大最小 15 内接円の方程式 16 直線の通過領域 17 線分の通過領域
 18 必要条件・十分条件 21 極と極線

第4章 ベクトル・図形 (31 題) 185

1 2 交点の位置ベクトル 3 重心, 図形量の最大最小 4 条件から点の位置
 を読み取る 5 6 点の存在範囲 7 平面ベクトルと内積 8 外心を始点とす
 るベクトル 9 内心・外心の位置ベクトル 10 円のベクトル方程式 11 円の
 ベクトル方程式, 内積の最大最小 12 直線と平面の交点 13 共線条件・共面条件
 14 空間ベクトルと内積 15 17 四面体の体積 16 2直線の最短距離 18 折
 れ線の長さの最小値 19 球面の方程式 20 平面上の点との距離の最小値
 21 22 内接四角形 23 円に内接する六角形 24 円と直線・三角形 25 26 平

面図形 27 円に内接する三角形 28 中点の存在範囲 29 30 空間図形
31 等面四面体

第5章 場合の数・確率 (29 題) 253

1 2 隣り合う・隣り合わない順列 3 4 4桁の整数を作る 5 三角形を作る
6 最短経路数 7 円順列・数珠順列 8 数珠順列 9 区別のないものの
組分け 10 11 区別のあるものの組分け 12 方程式・不等式を満たす整数
13 確率の基本 14 「かつ」「または」の確率 15 最大値の確率 16 最大値・
最小値の確率 17 18 反復試行の確率 19 積が～の倍数となる確率
20 21 22 23 確率漸化式 24 25 場合の数漸化式 26 確率の最大値 27 条
件付き確率 28 確率の積の法則, 期待値 29 確率の和

第6章 数列・整数 (37 題) 315

1 2 等差数列・等比数列 3 数列の和 4 2数の積の総和 5 階差数列
6 7 8 群数列 9 10 格子点の個数 11 2項間漸化式 (基本) 12 2項
間漸化式 (応用) 13 3項間漸化式 14 連立漸化式 15 その他の漸化式
16 図形と漸化式 17 18 漸化式と帰納法 19 3項間漸化式の作成 20 約数
の個数と総和 21 末尾に並ぶ0の個数 22 23 24 方程式の整数解 25 ユー
クリッドの互除法 26 1次不定方程式 27 平方数の性質 28 余りの周期性
29 30 倍数であることの証明 31 すべてを割り切る素数 32 多項式と整数
33 整数係数の方程式 34 存在証明 35 存在する・存在しない 36 互いに
素の証明 37 n 進法

第7章 指数・対数・三角関数 (26 題) 381

1 指数対数方程式・不等式 2 指数関数の最大最小, 指数方程式 3 対数関数
の最大最小 4 指数方程式の解の配置 5 対数方程式の解の個数 6 対数不
等式の表す領域 7 桁数, 最高位 8 常用対数 9 三角関数の方程式・不等
式 10 $\sin, \cos$ の2次同次式 11 12 $\sin, \cos$ の対称式 13 14 置き換えを必
要とする最大最小 15 16 置き換えをしたときの解の個数 17 特殊な置き換えに
よる最大最小 18 方程式の解の存在 19 $\sin, \cos$ の恒等式 20 和積の公式
21 22 23 24 図形量の最大最小 25 なす角の最大最小 26 $\cos \frac{2}{7}\pi$ を解にもつ
方程式

第8章 さらに理解のために 427

存在条件 (第1～3章関連) / 合同式 (第6章関連)

【解答】

$$(1) \quad x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx)$$

であり、「 $x + y + z = 0$ かつ

$xy + yz + zx = 0$ 」より、

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

よって、 x, y, z は実数より、

$$x = y = z = 0 \quad \boxed{\text{終}}$$

$$(2) \quad x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

であり、「 $x + y + z = 0$ かつ

$x^3 + y^3 + z^3 = 0$ 」より、

$$-3xyz = 0 \quad \therefore \quad xyz = 0$$

よって、 x, y, z のうち少なくとも1つは0である。 $\boxed{\text{終}}$

$$(3) \quad x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = (x + y + z) \cdot \frac{1}{2} \{ (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \}$$

$$+ (y - z)^2 + (z - x)^2 \}$$

ここで、 $xyz = 0$ であると仮定すると、

背理法を用いる。

「 x, y, z のどれも0ではない」の否定は、

「 x, y, z の少なくとも1つは0」
 $\iff$ 「 $xyz = 0$ 」

$x^3 + y^3 + z^3 = 0$ と合わせて、

$$0 = (x + y + z) \cdot \frac{1}{2} \{ (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \}$$

$x + y + z \neq 0$ より、

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0$$

x, y, z は実数より、 $x = y = z$

これと、 $x^3 + y^3 + z^3 = 0$ より、 $x = y = z = 0$ となるが、これは $x + y + z \neq 0$ であることに矛盾。

よって、 $xyz \neq 0$ であるから、 x, y, z のどれも0ではない。 $\boxed{\text{終}}$

21 不等式の証明

(1) $a \geq b, x \geq y$ のとき、 $(a + 2b)(x + 2y) \leq 3(ax + 2by)$ を示せ。

(岡山県立大)

(2) $a > 0, b > 0$ のとき、 $\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{4}{a}\right)$ の最小値を求めよ。

(立教大)

(3) 実数 x, y, z の間に $x + 2y + 3z = 7$ という関係があるとき、 $x^2 + y^2 + z^2$ の最小値を求めよ。

(早稲田大)

指針

不等式の証明問題では、

★不等式の証明

$A \geq B$ を証明する場合,

① $A - B \geq 0$ を示す.

→ $()^2 + ()^2 + ()^2 + \dots$

→ 因数分解 (不等式の条件が与えられているとき)

② $A \geq 0, B \geq 0$ の場合は,

$A^2 \geq B^2$ すなわち, $A^2 - B^2 \geq 0$ を示す.

③ 有名不等式の利用

に従って考えていくのが基本です. ③の有名不等式に関しては,

- ・相加相乗平均の不等式
- ・コーシー・シュワルツの不等式
- ・三角不等式 (三角形の成立条件)
- ・凸不等式

グラフの凸性を利用して作られる不等式. 理系はできればここまで押さえておきたい.

辺りを押さえておきましょう.

(1) (右辺) - (左辺) ≥ 0 を示します. $a \geq b, x \geq y$ と不等式の条件があるので, 因数分解することを考えましょう.

(2) は相加相乗平均の不等式, (3) はコーシー・シュワルツの不等式が利用できます.

★相加平均・相乗平均の不等式

$a > 0, b > 0$ のとき

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

(和) $\geq 2\sqrt{(\text{積})}$

(実際は, $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ の形で使うことが多い)

等号は, $a = b$ のときに成立する.

★コーシー・シュワルツの不等式

① a, b, x, y が実数のとき

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$$

いずれも,
(2乗の和の積) $\geq$ (積の和)²

(等号は, $abxy \neq 0$ の場合, $a : b = x : y$ のときに成立)

② a, b, c, x, y, z が実数のとき

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$$

(等号は, $abcxyz \neq 0$ の場合, $a : b : c = x : y : z$ のときに成立)

ただし, (2)(3) はいずれも不等式の証明問題ではなく, 最小値を求める問題です.

相加相乗やコーシー・シュワルツで最大値や最小値を求める問題では, 必ず等号成立条件を述べる

ようにしてください。例えば、 y の最小値が10であったとしても、「 $y \geq 9$ 」は成り立ってしまうので、

$$「y \geq 9」 \Rightarrow 「y \text{の最小値が} 9」$$

は偽です。 $y \geq 9$ で最小値が9であることを保証するためには、等号成立条件が必須なのです。

また、コーシー・シュワルツの不等式の証明自体も、よく出題されます。不等式証明のよい練習になるので、必ず各自挑戦してみてください。①②いずれも、(左辺)－(右辺)を $()^2$ 、あるいはその和の形に変形し、0以上であることを示します(補足参照)。

【解答】

(1) (右辺)－(左辺)

$$\begin{aligned} &= 3(ax + 2by) - (a + 2b)(x + 2y) \\ &= 3ax + 6by - (ax + 2ay + 2bx + 4by) \\ &= 2(ax - ay - bx + by) \\ &= 2(a - b)(x - y) \geq 0 \end{aligned}$$

$$(a \geq b, x \geq y \text{より}, a - b \geq 0,$$

$$x - y \geq 0)$$

よって、(左辺) $\leq$ (右辺) **【終】**

【注】 不等式証明の問題では、等号成立条件を問われていなければ述べなくてもよい。もし本問で問われている場合は、等号が成り立つのは、

$$a - b = 0 \text{ または } x - y = 0$$

$$\therefore a = b \text{ または } x = y$$

のときとなる。

$$(2) \left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{4}{a}\right) = ab + \frac{4}{ab} + 5$$

ここで、 $a > 0, b > 0$ より、 $ab > 0$ 、

$\frac{4}{ab} > 0$ であるから、相加相乗平均の不等式より、

$$ab + \frac{4}{ab} \geq 2\sqrt{ab \cdot \frac{4}{ab}} = 4$$

等号は、

$$ab = \frac{4}{ab} = 2$$

$$\begin{cases} ab = \frac{4}{ab} \\ ab + \frac{4}{ab} = 4 \end{cases}$$

より、 $ab = \frac{4}{ab} = 2$

より、 $ab = 2$ のときに成立。

よって、求める最小値は、

$$4 + 5 = 9 \quad \text{【答】}$$

(3) コーシー・シュワルツの不等式

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \\ \geq (ax + by + cz)^2 \end{aligned}$$

において、 $a = 1, b = 2, c = 3$ とすると、

$$\begin{aligned} (1^2 + 2^2 + 3^2)(x^2 + y^2 + z^2) \\ \geq (x + 2y + 3z)^2 \end{aligned}$$

$x + 2y + 3z = 7$ より、

$$14(x^2 + y^2 + z^2) \geq 7^2$$

$$\therefore x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{7^2}{14} = \frac{7}{2}$$

等号は、 $x : y : z = 1 : 2 : 3$ より、 $x = k, y = 2k, z = 3k$ とおくと、 $x + 2y + 3z = 7$ より、

$$k + 2 \cdot 2k + 3 \cdot 3k = 7 \quad \therefore k = \frac{1}{2}$$

よって、 $(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right)$ のときに成立。

したがって、求める最小値は、 $\frac{7}{2}$ **【答】**

参考1

1文字消去により、独立2変数関数の最小値問題として考えてもよいが、計算量が多い。

$$x = 7 - 2y - 3z \quad \cdots \textcircled{1}$$

より、

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= (7 - 2y - 3z)^2 + y^2 + z^2 \\ &= 5y^2 + (12z - 28)y + 10z^2 - 42z + 49 \\ &= 5 \left(y + \frac{6z - 14}{5} \right)^2 - \frac{(6z - 14)^2}{5} + 10z^2 - 42z + 49 \\ &= 5 \left(y + \frac{6z - 14}{5} \right)^2 + \frac{14z^2 - 42z + 49}{5} \\ &= 5 \left(y + \frac{6z - 14}{5} \right)^2 + \frac{14}{5} \left(z - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{7}{2} \end{aligned}$$

よって、「 $y = -\frac{6z - 14}{5}$ かつ $z = \frac{3}{2}$ 」, また①も考慮すると、

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2} \right)$$

のとき、求める最小値は、 $\frac{7}{2}$ **答**

$(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$
より、 $k \neq 0$

参考2

xyz 空間において、 $x + 2y + 3z = 7$ が平面の方程式、 $x^2 + y^2 + z^2 = k$ ($k > 0$)が球面の方程式を表すことを知っていれば、共有点条件に帰着することも可能。

$x^2 + y^2 + z^2 = k$ とおくと、 k の値域は、

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = k & \cdots \textcircled{1} \\ x + 2y + 3z = 7 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

を満たす実数 x, y, z が存在するような k の条件として与えられる。

①は原点中心、半径 $\sqrt{k}$ の球面、②は平面を表し、原点と平面②との距離は、

$$\frac{|-7|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

点と平面の距離公式

したがって、球面①と平面②が共有点をもつ条件を考えて、

$$\frac{\sqrt{14}}{2} \leq \sqrt{k} \quad \therefore k \geq \frac{7}{2}$$

よって、求める最小値は、 $\frac{7}{2}$ **答**

補足 コーシー・シュワルツの不等式の証明

① (左辺) - (右辺)

$$\begin{aligned} &= (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - (ax + by)^2 \\ &= (a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2) - (a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2) \end{aligned}$$