# 良問の風に吹かれて

## 良問の風に乗って基礎から応用に自然に辿り着く

「どんな問題を学習すれば入試問題を解く実力がつくのだろう。」
「良問を学習すればよいといわれるが，**良問ってどんな問題**なんだろう。」
「問題を解いて結果が一致すれば理解していることになるのだろうか。」

受験生ならこのようなことを考えたことがあるだろう。

一度解いたことのある問題を同じように考えて解けても，真に理解しているとは限らない。入試問題をパターン学習しても難関大学の合否を分ける難度の問題を解く実力はつかない。難関とされる大学は，公式や定理を丸暗記して使い方の練習を繰り返している受験生，パターン学習をして経験で解こうとしている受験生ではなく，定義を理解し公式や定理の根拠を理解しているかなど，いわゆる**「考える力」**がある受験生が合格できる問題を出題しようとしている。

本書では定義や定理の**「最も基本であることが理解できているのか」**がチェックできる問題から始め，そこから風に乗っているがごとく**基本がどのように応用されるのか**が体感できるように問題が並べられている。したがって**「分野」にとらわれず問題が並べられている。**

さらに，初めて解く入試問題において難しいのは**どんな道具（分野）を用いる**のか，**どこを変数に取る**と作業（計算）が楽になるのか，**論理をどのように駆使する**のかなどである。そのような**「問題を解くための糸口」**を見つける力，**「記述する力」**をつけなければならない。

多くの入試問題では，(1)，(2)，(3)…と小問で「誘導」されている場合が多いがそのような問題をいくら練習しても「問題を解く糸口」を見つける実力はつかない。

問題を解く方針に必然性がある問題に関しては，小問にあたる誘導を排して**自分で糸口が見つけられる力がつく**ように，実際に出題された**入試問題を改題**してある。いわゆる，目的地に到達する実力をつけるために「手すりのついた山登り」の練習ではなく，自分で手掛かり，ルートを考える「ボルダリング」の練習をするような構成にしてある。強制的に方針を押し付けられるのではなく，自由な発想で考えることの楽しさが感じられるようになれば自然に実力がつき，初めて見る問題も本書で学習してきた問題と基本的な構造が同じであることがわかってくる。そうなれば目指す大学の合格は間違いない。


問題を考える楽しみを味わおう。

# 本書の使い方

「問題編」と「考え方，解答，解説編」で構成してある。
「問題編」において難易度の高い問題には問題番号の右上に「＊」が付けられている。最初は解けなくても落胆することはないが，入試までには解けるようにしたい。

（出典の記されていないものは，オリジナル問題，出典不明などの問題である。）

「考え方，解答，解説編」において

**考え方**：問題文からどこに着目するのか，どんな道具（分野）が合理的なのか，どこを変数に取ると効率がよいのか，どんな予備知識が必要なのかなど問題を解く方針や糸口の見つけ方が載せられている。
問題を解くことができなかった場合，この部分だけ読んで再度チャレンジする。

**●解答●**：入試本番において記述すべきコンパクトにまとめた内容が載せられている。なお，式の変形，考え方，アイディア，注意すべきことなど**●解答●**の右側に赤で(ア)，(イ)，…でマークしてあり説明が**■解説■**に載せてある。

**■解説■**：**●解答●**の方針をなぜ選択したのかなど，ここで扱った問題の根底にある数学の内容や周辺の知識などが載せられている。問題を解くことだけに満足せず理解していくことが重要である。

いずれも問題の構造を理解する重要な指針である。
早速問題を解いて風に乗っていこう！
なお，「良問の風　理系数学①」からの風に乗った方が，「良問の風　理系数学②」の風に乗りやすい！

# 第1章　平面ベクトル中心

**1**　平面上の四角形 ABCD 内に 1 点 P があり

$$2(\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP})=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD},\quad 2\overrightarrow{BP}+3\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{PA}$$

を満たしている．

四角形 APCD と四角形 ABCD の面積の比を求めよ．

**2**　三角形 OAB があり，実数 $s$，$t$ に対して $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ を満たす点 P を対応させる．

(1)　$s$，$t$ が $3s+t=2$ を満たしながら変化するとき，P の全体はどのような図形を描くか．

(2)　$s$，$t$ が

$$s\geqq 0,\quad s+t\geqq 1,\quad 3s+t\leqq 2$$

を満たしながら変化するとき，P の全体はどのような図形を描くか．

**3**　平面上に三角形 ABC と点 P がある．(i)，(ii) は同値であることを示せ．($\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{p}$ はそれぞれ点 A，B，C，P の位置ベクトルとする．)

(i)　P が三角形 ABC の内部にある．

(ii)　次の条件を満たす 3 実数 $\alpha$，$\beta$，$\gamma$ がとれる．

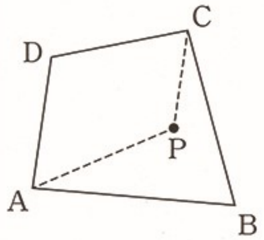
$$\vec{p}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}\quad(\alpha+\beta+\gamma=1,\ \alpha>0,\ \beta>0,\ \gamma>0)$$

**4**　平面上に 2 点 A，B があり，AB=6 である．A を中心とする半径 1 の円周を $C_1$ とし，B を中心とする半径 2 の円周を $C_2$ とする．点 P は $C_1$ 上を，点 Q は $C_2$ 上を，それぞれ独立に自由に動きまわるとする．線分 PQ の中点を M とするとき，M はどのような図形を描くか．

# 第1章　平面ベクトル中心

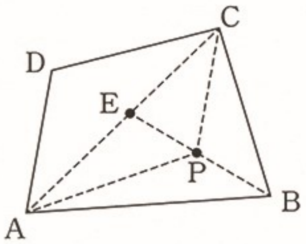
## 1

### 考え方



⏢APCD と ⏢ABCD の面積比を求めたいので
⏢APCD について分析したい．よって，$\overrightarrow{BP}$ を消去する．

### ●解答●



$$2(\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP})=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD} \qquad \cdots①$$

$$2\overrightarrow{BP}+3\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{PA} \qquad \cdots②$$

①，②より $\overrightarrow{BP}$ を消去して

$$\overrightarrow{PA}-3\overrightarrow{CP}+2\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}$$

$$\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD},\ -\overrightarrow{AP}-(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AD}+(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})$$

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AD} \text{ すなわち } \overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AP}$$

ゆえに四角形 APCD は平行四辺形．　…③

② より $2\overrightarrow{BP}+3\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{PA}$，　$2\overrightarrow{BP}+3(\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BP}$，　$6\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{BC}$　☜(ア)

$$\overrightarrow{BP}=\frac{4}{6}\cdot\frac{\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{BC}}{3+1}$$

辺 AC を 3：1 に内分する点を E とすると

$$\overrightarrow{BP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BE} \text{ ゆえに } BE:PE=3:1$$

よって

$$\triangle PCA=\frac{1}{3}\triangle ABC$$

$$⏢ABCD=\triangle ABC+\triangle ACD=\triangle ABC+\triangle PCA=\frac{4}{3}\triangle ABC \qquad (③ より)$$

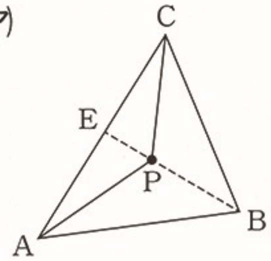
$$⏢APCD=2\triangle PCA=\frac{2}{3}\triangle ABC \qquad (③ より)$$

ゆえに

$$⏢APCD:⏢ABCD=\mathbf{1:2}.$$

■解説■

(ア)



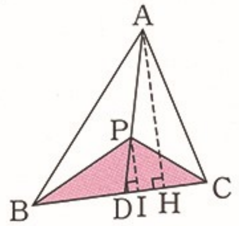

▱APCD が平行四辺形なので △APC＝△ADC

また，直線 BP と AC の交点を E として

BP：PE がわかれば △ABC：△PCA＝BE：EP となり

△PCA が △ABC で表せる．

（参考）



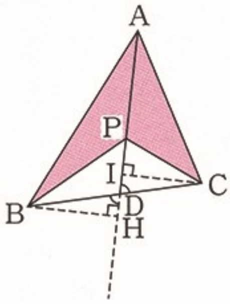

一般に

△ADH∽△PDI より

AH：PI＝AD：PD

ゆえに

△ABC：△PBC＝AD：PD




△BDH∽△CDI より

BH：CI＝BD：CD

ゆえに

△ABP：△ACP＝BD：CD

これも利用価値がある．

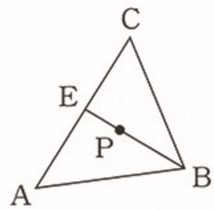
したがって，P が線分 BE のどのような内分点であるかを求めた．

なお，ベクトルのよさの１つとして**始点を自由に選ぶことができる**ところがある．

（P の位置を求める別の計算）

$2\overrightarrow{BP}+3\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{PA}$　P を始点にして

$$\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\vec{0} \qquad 2\overrightarrow{PB}+\mathbf{4}\cdot\frac{\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PC}}{\mathbf{1+3}}=\vec{0}$$




線分 AC を 3：1 に内分する点を E として

$$\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PE}=\vec{0},\quad \overrightarrow{PB}=-2\overrightarrow{PE}$$

ゆえに PE：PB＝1：2 より BE：PE＝3：1

# 2

## 考え方

(1)　$t$ を消去して図形的な意味を考える．

(2)　$\begin{cases} s\geqq 0 & \cdots ① \\ s+t\geqq 1 & \cdots ② \\ 3s+t\leqq 2 & \cdots ③ \end{cases}$　① かつ ② かつ ③ を考えるので ①，②，③ を満たす領域を別々に求めて **交わり部分が求める領域**である

①，②，③ いずれも $s$ と $t$ は**独立**である．

$\left(\begin{array}{l} s \text{ を1つ決めても } t \text{ が1つに決まらない} \\ t \text{ を1つ決めても } s \text{ が1つに決まらない} \end{array}\right)$

したがって，**１つの文字を固定して**考え，後で動かす方針をとる．

# 目　次