はじめに

大学入試数学における整数分野の問題は，その解答を見てしまえば「なんだこんな簡単な話か」というものであっても，初見時には着手しどころがまるで判らない（言い換えると経験がものを言う）問題が多い．

かてて加えて，高校の授業ではこの分野はほとんど扱われないにもかかわらず，入試では頻出で，しかも教科書の問題と入試ではそのレベルの乖離の最も激しい分野の一つである．

なのに大学入試における整数問題に限った判り易い参考書や手ごろな問題集が市場に出まわっていない．

この状況を踏まえて，

① **ここ数十年の大学入試の整数問題約2000題を分析，分類，取捨選択し，**

② **参考書部分　＋　問題集部分　に構成し，**

③ **高校までに学んだ知識だけで理解できる解説をし，解答例を作成し，**

④ **後は各自の志望大学で出たことのある整数問題のチェックだけで済む**

ことを目指した「これだけでよい」という本をつくった．

参考書部分の各講は，

頻出かつ重要な問題の例題とその解答，解説　＋　例題の類題

のセットで構成されており，この類題の解答は次の問題集部分にある**力だめし問題**の解答と併せて別冊子としている．なお，講の並びについては，その数学的内容のみならず，見た目の類似性も考え併せて配置した．また，例題だからといって易しいとはかぎらないから，覚悟して学習して欲しい．

問題集部分には，やや難しい**力だめし問題**を25題用意してあり，これで参考書部分の学習の理解の程度を確認できるようになっている．

また，問題文の理解，解法の発見が難しいであろうものには，†（ダガーマーク）を付けておいた．20分程度戦っても解決を見ない様なら，解答を見てしまうのも一手だと思う．

おことわり

学習途中で,「この問題,前の問題ととてもよく似ているのに全く違う解き方をしている」とか,「この解法,確か前にもあった」と感じることが何度もあることと思う.更には,「一つの問題については best の解法だけ学べば(暗記すれば)いいのに,何故(なにゆえ),こんなにも別解を載せるのか」と不思議に思う読者も出て来るに違いない.

正に,それが筆者の狙うところであって,

- **一つの問題に色々なアプローチ,工夫を試みること,**
- **一つの工夫の仕方が多くの問題解決に適用できることを知ること**

が試験場での行き詰まりの打開力につながると考えているからである.

また,「整数」がメインテーマの問題であるが,解くためには整数の性質以外の知識が必要な問題も結構多い.(例えば,平面図形と方程式や不等式,三角関数,指数関数,対数関数,数列,順列と組合せ,二項定理,ベクトル,微分,積分　等々.)

この場合,既習でないと難しい場合もあるだろう.現役生は,その単元を履修した後にまたその問題に戻って再度挑戦して欲しい.

なお,問題文の表現を原典から変更した場合であっても,その解答が元と全く同じでよいときや穴埋め問題を論述式問題に変更しただけのとき,その出典を一々「○○大・改」とはしなかった.

また,頻出の問題ばかりを選んだのだから当たり前であるが,その類題の総ての出典を挙げると煩雑になるから,これについてはスペースが許す程度にとどめた.

この本のすべての解答例は,

「大学合格後は整数問題に二度と出遭うことの無いであろう受験生」

であっても読めるよう易しく(しかしながら冗長にならない程度に)書いた.入試の際はここまで詳しく書かなくとも満点をとれるだろう.

なお,答案をスッキリとさせる為に次の意味を持つ記号を用いた.

$\therefore$　(それ故(ゆえ)に,したがって,よって,だから,therefore)

$\because$　(なぜならば,because)

目　次

第2章　重要例題＋類題

例題1　《不定方程式（その1）》

□ (1)　45を引いても44を足しても平方数となるような自然数を求めよ.　（東京女子大）

□ (2)　m を正の整数とする. m^3+3m^2+2m+6 はある正の整数の3乗である. m を求めよ.　（一橋大）

解法メモ

(1)　**平方数**とは自然数の2乗になっている数のことですから求める自然数を n とおくと

$$\begin{cases} n-45=k^2, \\ n+44=l^2 \end{cases} \quad (k,\ l \text{ は自然数})$$

と表せますが, 未知数は n, k, l の3つあるのに, 方程式が2本で1本足りません. 言い換えると「条件が緩い」のです.

しかし, 例えば $xy=6$ をみたす x, y の組は次の様にいくらでもありますが

$$(x,\ y)=(i,\ -6i),\ (\sqrt{2},\ 3\sqrt{2}),\ \left(-\frac{3}{2},\ -4\right),\ \cdots$$

「x, y は整数である」という条件（これを**整数条件**と言います）が付加されると,

$$(x,\ y)=(\pm1,\ \pm6),\ (\pm2,\ \pm3),\ (\pm3,\ \pm2),\ (\pm6,\ \pm1) \quad (\text{複号同順})$$

とたった8組に絞られてしまいます. x, y に大小関係でもあれば更に限定されます.

という訳で, 与条件を同値変形して,

（整数）×（整数）＝（具体的整数）

の形を狙ったりして, 方程式の数の足りない分を整数条件で補う方針でいきます.

(2) でも, $m^3+3m^2+2m+6=n^3$ (m, n は正の整数) という関係式が成り立ちますが, 未知数は m, n の2つあるにもかかわらず, 方程式が1本で1本足りません.

$$m^3,$$
$$(m+1)^3=m^3+3m^2+3m+1,$$
$$(m+2)^3=m^3+6m^2+12m+8$$

を与式 m^3+3m^2+2m+6 と較べてみると, ….

解答

(1)　求める自然数を n とおくと, 与条件から,

$$\begin{cases} n-45=k^2, & \cdots① \\ n+44=l^2 & \cdots② \end{cases}$$

をみたす自然数 k, l ($k<l$) が存在して, ②−① から,

$$l^2-k^2=89.$$

$$\therefore\quad (l+k)(l-k)=89.$$

左辺を因数分解．

ここで，k，l は共に自然数で，$k<l$ だから，$l+k$，$l-k$ は共に整数で，$l+k>l-k>0$ ゆえ，

$$(l+k,\ l-k)=(89,\ 1).$$

89 は素数．

$$\therefore\quad (l,\ k)=(45,\ 44).$$

これと ① から，求める自然数は，

$$n=44^2+45=\mathbf{1981}.$$

② から，$n=45^2-44=1981$ とするのも可．

(2)(その 1)

m は正の整数だから，

$$m^3<m^3+3m^2+2m+6<(m+2)^3.$$

$(m+2)^3=m^3+6m^2+12m+8.$

したがって，この中辺が或る正の整数の 3 乗に等しいのなら，$m^3+3m^2+2m+6=(m+1)^3$ に限る．

$$\therefore\quad m^3+3m^2+2m+6=m^3+3m^2+3m+1.$$

$$\therefore\quad m=\mathbf{5}.$$

(その 2)

与条件から，

$m^3+3m^2+2m+6=(m+k)^3$ （k は正の整数）

とおける．

$\therefore\quad 3(k-1)m^2+(3k^2-2)m+k^3-6=0.\quad \cdots(*)$

$k=1$ とすると，$m-5=0.\quad \therefore\quad m=5.$

$k\geqq 2$ とすると，$k-1>0$，$3k^2-2>0$，$k^3-6>0$ となるから，$(*)$ をみたす正の整数 m は存在しない．

以上より，求める正の整数 m は，**5**．

類題 1 ☑ (1) 自然数 a，n，k に対して，$n(n+1)+a=(n+k)^2$ が成り立つとき，

$$a\geqq k^2+2k-1$$

が成り立つことを示せ．

☑ (2) $n(n+1)+14$ が平方数となるような自然数 n をすべて求めよ．

（北海道大）

類題 1

(1) 自然数 $\underline{a,\ n,\ k}_{①}$ に対して，$n(n+1)+a=(n+k)^2$ が成り立つとき，

$$n^2+n+a=n^2+2kn+k^2. \qquad \therefore \quad a=(2k-1)n+k^2.$$

$$\begin{aligned}\therefore \quad a-\left(k^2+2k-1\right)&=(2k-1)n+k^2-\left(k^2+2k-1\right)\\&=(2k-1)n-(2k-1)\\&=(2k-1)(n-1)\\&\geqq 0 \quad (\because \ ①.\ \text{等号成立は}\ n=1\ \text{のとき}).\end{aligned}$$

$$\therefore \quad a \geqq k^2+2k-1.$$

(2) ① から，$n(n+1)+14>n^2$ ゆえ，$n(n+1)+14$ が平方数となるなら，

$$n(n+1)+14=(n+k)^2 \qquad \cdots ②$$

となるような自然数 k が存在するから，(1) で示した不等式が使えて ($a=14$)，

$$14 \geqq k^2+2k-1. \qquad \therefore \quad k^2+2k-15 \leqq 0.$$

$$\therefore \quad (k+5)(k-3) \leqq 0. \qquad \therefore \quad -5 \leqq k \leqq 3.$$

ここで ① より，$k=1,\ 2,\ 3$ に限る．

(i) $k=1$ のとき，② は，$n(n+1)+14=(n+1)^2$.

$$\therefore \quad n=13.$$

（このとき，$13(13+1)+14=14^2$ は平方数である．）

(ii) $k=2$ のとき，② は，$n(n+1)+14=(n+2)^2$.

$$\therefore \quad n=\frac{10}{3}.$$

これは ① に不適．

(iii) $k=3$ のとき，② は，$n(n+1)+14=(n+3)^2$.

$$\therefore \quad n=1.$$

（このとき，$1\cdot(1+1)+14=4^2$ は平方数である．）

以上，(i)，(ii)，(iii) より，求める自然数 n は，

$$1,\ 13.$$

類題 2

${}_{n+2}\mathrm{C}_{k+1}=2({}_{n}\mathrm{C}_{k-1}+{}_{n}\mathrm{C}_{k+1})$ から，

$$\frac{(n+2)!}{(n-k+1)!(k+1)!}=2\left\{\frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!}+\frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!}\right\}.$$

この両辺に，$\dfrac{(n-k+1)!(k+1)!}{n!}$ を掛けて，