勉強を始める皆さんへ

予備校で授業をしていると，文系の受験生から，

「文系って数学はどれくらいやればいいのですか？」

「英語は大丈夫だけど数学が苦手で困っています」

「数学は何から手をつけてよいのか分からないのですが…」

という相談を毎日のように受けます．

皆さんも同じことを相談したいと思っているかも知れませんね．しかし，もう大丈夫です．この本がその悩みを解消してくれます．

この本は，

文系で数学を必要とする受験生が最初にやるべき１冊

になっています．もう少し詳しく言うと，この本で勉強すれば，

- 文系で数学を必要とするすべての受験生がマスターしなければならない基本事項を整理できる
- 文系の数学入試で数多く見られる典型的な問題，すなわち，落とせない問題を中心に配置しているので，標準レベルの問題に対応できる数学力が確実に身につく

ということです．出題の少ない特殊な問題や難問は一切入っていませんので，この本をやり遂げた段階で，**文系の数学入試に向けての基本が固まり，落としてはいけない問題を確実にとっていく力がつきます**．

この本で扱っている問題が理解できて定着していれば，その段階で，標準程度の数学力はついていると思ってよいでしょう．そして，この本でガッチリと基礎を固めたら，難関大学の発展的な問題や融合問題に挑戦していくこともできるでしょう．

なお，この本は文系で数学を必要とする受験生に向けてのものですが，理系で基礎力に自信のない人にもおすすめします．この本で基本を作り上げてから，その次のレベルにステップアップしていけばよいでしょう．

それでは，次のページから，この本で勉強していくときの注意点を書いておきます．

この本の効果的な使い方
（力をより伸ばすために必ず読んでください）

まず，この本の構成を紹介しておきます．１つのテーマに対して，

問題文／解答／解説講義／文系数学の必勝ポイント

の順に書かれていて，巻末には115題の演習問題が用意されています．

１つのテーマ，問題に対して，次の３Stepで取り組みましょう．

■First Step：「問題」を解いてみる

・公式などの基本事項が曖昧であれば，問題を解く前に教科書の該当部分を読み直し，ある程度の内容を確認してから解いてみましょう．
・文系の私立大学では，穴埋め形式やマーク形式など，いろいろな解答形式で入試が実施されています．本書では，学習効果を高めるために，ごく一部の問題において解答形式や問題文の表現を変更していますが，出題されている内容については変更を行っていません．また，理系の学部の入試問題であっても，標準的で文系の数学の学習にふさわしい問題は採用しています．
・本番の入試が穴埋め形式であっても，普段の勉強のときには途中のプロセスを書いた方が考え方を習得しやすくなります．計算式を列挙するような答案ではなく，日本語を入れた答案を作ってみましょう．
・すぐに解答を見るのではなく，必ず“考える”ということをしてください．その上で**「自分はどこでつまってしまったのか？　何が分かっていなかったのか？」を明確にしておく**ことが大切です．

■Second Step：「解答」を確認して，「解説講義」を読む

・自分の答案の流れと，「解答」を比べて正しく解けているかを確認します．
・最終的な答え（数値など）が合っているからといって，「解答」を読まないという勉強はしてはいけません．仮に正解していても，「解答」を読んで確認することに意味があるのです．
・さらに，**「解説講義」は必ず読んでください！**　単なる解答の補足ではなく，そのテーマの本質的な説明，陥りやすいミス，注意してほしいことなどが，紙面の許す限り書き込まれています．**長いところもありますが，飛ばさずにしっかりと読んでください．**

■Third Step：その問題の重要事項を「文系数学の必勝ポイント」でまとめる

- 「文系数学の必勝ポイント」では，そのテーマ，問題を通して習得すべき重要事項を簡潔にまとめています．この"まとめ"の作業をすることで，似た問題が次に出されたときに正解できるようになっていくわけです．
- 「文系数学の必勝ポイント」を確認したら，一旦，そのテーマは終了です．問題の右上部分にチェックボックス（2つ並んだ正方形のこと）があるので，大丈夫なら◎，もう一度やった方がよければ△，などのように印をつけておいて自分の理解度が分かるようにしておきましょう．そして，理解不十分な問題は何度かやり直しをして，入試までにできるようにしていきましょう．

以上の3Stepで勉強を進めていき，区切りのよいところで，巻末の演習問題に挑戦してみましょう．演習問題はやや手応えのある問題も少しずつ入っていますが，詳しい別冊解答が準備されています．115題というボリュームですが，これをやり遂げることは入試に向けての大きな自信となっていくでしょう．

文系の人にとって数学は楽しくない科目かもしれません．しかし，第1志望の大学に行くためには数学を避けては通れない人もいるでしょう．文系の人に「数学を好きになってください」とは言いませんが，数学が原因で夢をあきらめるような寂しいことにはなってほしくありません．数学はコツコツとがんばって勉強していけば，次第に力が伸びていく科目です．粘り強い努力を積み重ね，その手で「合格」を勝ち取ってください．この本が君の努力を合格につなげてくれるでしょう．さあ，早速はじめましょう！

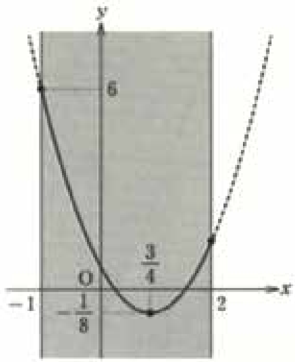
15　2次関数の最大最小問題

2次関数 $y=2x^2-3x+1\ (-1 \leqq x \leqq 2)$ の最大値，最小値をそれぞれ求めよ．　　(中央大)

解答

$$
\begin{aligned}
y &= 2x^2-3x+1 \\
&= 2\left(x^2-\frac{3}{2}x\right)+1 \\
&= 2\left\{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}\right\}+1 \\
&= 2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{8}+1 \\
&= 2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{8} \qquad \cdots ①
\end{aligned}
$$

◀ x^2 の係数で x^2 と x の項をくくってから (　　)^2 を作る



これより，① の頂点は $\left(\frac{3}{4},\ -\frac{1}{8}\right)$ であり，

$-1 \leqq x \leqq 2$ におけるグラフは右のようになる．

したがって，

最大値 6，最小値 $-\frac{1}{8}$

解説講義

2次関数の最大値，最小値は，グラフを使って考える．指定された範囲（定義域）でグラフを描いて，"一番高いところ" が最大値，"一番低いところ" が最小値であることから求めるだけである．したがって，まずグラフを描くために頂点を求めなければならない．頂点を求めるためには解答のように**平方完成**を行えばよい．この作業で計算ミスをすると大きく点数を失う場合が多いので，迅速かつ正確にできるようにしておく必要がある．

当然のことであるが，関数の最大最小の問題は，**正しい範囲で正しい関数を分析**してはじめて正解となる．平方完成して即座に「頂点のところが最小！」と答えている誤答をよく見かける．本問は頂点が定義域の $-1 \leqq x \leqq 2$ に含まれているから，頂点の y 座標である $-\frac{1}{8}$ が最小値になるのである．(もし定義域が $x \leqq 0$ であれば最小値は $-\frac{1}{8}$ ではない)

難しい内容ではないので，下の必勝ポイントに書かれた手順に従って，丁寧に解答することを心がけよう．

文系数学の必勝ポイント

2次関数の最大最小問題

(手順1)　平方完成して頂点を求める

(手順2)　定義域を確認する

(手順3)　グラフを描いて「頂点」と「端の値」に注目する

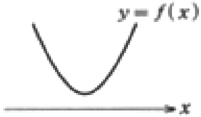
(イ) $a=0$ のとき

$f(x)=2x+1$ となり条件を満たさない.

(たとえば, $f(-1)=-1<0$ である)

(ウ) $a>0$ のとき

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線となり, 次のようになればよい. つまり, $y=f(x)$ のグラフが x 軸と共有点をもたない条件を考えればよい.



$ax^2+2(a+1)x+2a+1=0$ の判別式を D とすると,

$$\frac{D}{4}=(a+1)^2-a(2a+1)$$
$$=-a^2+a+1$$

であり, $\frac{D}{4}<0$ より,

$$-a^2+a+1<0$$
$$a^2-a-1>0$$
$$a<\frac{1-\sqrt{5}}{2},\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}<a$$

$a>0$ であるから,

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}<a$$

(ア), (イ), (ウ) より, 求める a の値の範囲は,

$$\boldsymbol{\frac{1+\sqrt{5}}{2}<a}$$

<補足：$a>0$ の場合について>

$a>0$ のとき,

$$f(x)=ax^2+2(a+1)x+2a+1$$
$$=a\left\{x^2+\frac{2(a+1)}{a}x\right\}+2a+1$$
$$=a\left\{\left(x+\frac{a+1}{a}\right)^2-\frac{(a+1)^2}{a^2}\right\}+2a+1$$
$$=a\left(x+\frac{a+1}{a}\right)^2-\frac{(a+1)^2}{a}+2a+1$$
$$=a\left(x+\frac{a+1}{a}\right)^2+\frac{-a^2-2a-1+2a^2+a}{a}$$
$$=a\left(x+\frac{a+1}{a}\right)^2+\frac{a^2-a-1}{a}$$

これより, 頂点の y 座標に注目すると, 求める条件は,

$$\frac{a^2-a-1}{a}>0$$

であり, $a>0$ にも注意すると,

$$a^2-a-1>0$$

が得られる.

平方完成が大変な場合には, 解答のように判別式の正負に注目すると計算量を減らすことができる.

15

> $-1\leqq x\leqq 1$ で $f(x)\geqq 0$ となる条件は $f(x)$ の最小値を考えるので, 放物線 $y=f(x)$ の軸が $-1\leqq x\leqq 1$ の範囲に含まれる場合と含まれない場合に分けて考える.

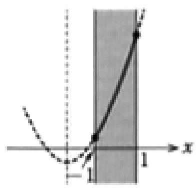
$$f(x)=x^2-(2a-3)x+2a$$
$$=\left(x-\frac{2a-3}{2}\right)^2-\frac{4a^2-12a+9}{4}+2a$$
$$=\left(x-\frac{2a-3}{2}\right)^2+\frac{-4a^2+20a-9}{4}$$

となるので, $y=f(x)$ のグラフは,

$$軸が\ x=\frac{2a-3}{2}$$

の下に凸の放物線である.

(ア) $\frac{2a-3}{2}<-1$ すなわち $a<\frac{1}{2}$ のとき



$-1\leqq x\leqq 1$ における最小値は,

$$f(-1)=4a-2$$

であり, 求める条件は,

$$4a-2\geqq 0$$
$$a\geqq\frac{1}{2}$$

これは $a<\frac{1}{2}$ を満たさない.