

はじめに

本書の概要

本書の目的は共通テスト数学II, B, Cの数学B「統計的な推測」＝「統計」で満点を取ることである。高校での試験対策や国公立二次試験や私立大入試の対策にもなる。共通テスト数学II, B, Cは「数列」、「統計」、「ベクトル」、「二次曲線と複素数平面」から3つを選択するが、選択の1つに「統計」を加えることを強く勧める。簡単だからだ。

特徴


1. 共通テスト数学II, B, Cの「統計」に必要な事すべてを「基本事項と練習問題」全15節にまとめ（第1.16, 17節は補足なので大学入学後に読めばよい）、共通テスト対策の演習問題を14回分載せた。本書のみで準備はすべて終わる。本書以外の教科書、参考書などを読む必要はない。
2. 短時間でこなせる。「各節30分×15＝8時間（第1.13節は1時間）」と「各演習問題30分（10分程度で解いて復習に10分）×14回＝7時間」程度で終わるから、毎日1時間ほど勉強するだけで2週間で終わる。1日ですべて終わらせる生徒も多い。
3. 時間がなければ、重要な部分に絞ればよい。具体的には
 - ・「基本事項と練習問題」の第1.1節, 1.2節, 1.8節, 1.11節, 1.12節, 1.13節, 1.14節, 1.15節
 - ・演習問題の第1回, 第3回, 第5回, 第7回, 第13回
 を勉強すれば何とかなる。それぞれ30分程度で済むだろうから合計6時間、ゆっくりでも9時間で終わる。「共通テストまで一週間だが、選択を代えたい」という場合でも間に合う。
4. すべて読まなくても大丈夫なように、必要な事はその度に書いた。「また同じことが書いてあるなあ」と思うことがあるときは、きみがしっかり理解したのだと了承して欲しい。（「第～節参照」などとあるのは、「見たければ見よ」という程度のことである。）
5. 第2章の演習問題14回分は、偶数回はその前の回の類題になっている。例えば、第2回は第1回の類題である。だから、奇数回が難しかったら、よく復習して次の回を解けば力がつく。

期待される効果

共通テスト数学 II, B, C の「統計」で満点が狙える。
 (根拠) 共通テスト数学 II, B, C の「統計」のテーマは

正規分布表

表の値は、標準正規分布の累積分布関数
 値 $\Phi(x)$ の百分位点 x の値 x の値
 x の値 x の値



x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5518	0.5558	0.5598	0.5638	0.5677	0.5717	0.5757
0.2	0.5797	0.5837	0.5877	0.5917	0.5957	0.5997	0.6037	0.6077	0.6117	0.6157
0.3	0.6197	0.6237	0.6277	0.6317	0.6357	0.6397	0.6437	0.6477	0.6517	0.6557
0.4	0.6597	0.6637	0.6677	0.6717	0.6757	0.6797	0.6837	0.6877	0.6917	0.6957
0.5	0.6997	0.7037	0.7077	0.7117	0.7157	0.7197	0.7237	0.7277	0.7317	0.7357
0.6	0.7397	0.7437	0.7477	0.7517	0.7557	0.7597	0.7637	0.7677	0.7717	0.7757
0.7	0.7797	0.7837	0.7877	0.7917	0.7957	0.7997	0.8037	0.8077	0.8117	0.8157
0.8	0.8197	0.8237	0.8277	0.8317	0.8357	0.8397	0.8437	0.8477	0.8517	0.8557
0.9	0.8597	0.8637	0.8677	0.8717	0.8757	0.8797	0.8837	0.8877	0.8917	0.8957
1.0	0.8997	0.9037	0.9077	0.9117	0.9157	0.9197	0.9237	0.9277	0.9317	0.9357
1.1	0.9397	0.9437	0.9477	0.9517	0.9557	0.9597	0.9637	0.9677	0.9717	0.9757
1.2	0.9797	0.9837	0.9877	0.9917	0.9957	0.9997	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2.2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2.3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2.4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2.5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2.6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2.7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2.8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

「正規分布表 (右図) を使いこなす」

というただ1つである。(本書の至る所に載せてある。)

数列やベクトル, 二次曲線, 複素数平面の問題のテーマが毎年変わることには比べるとはるかに単純であるから, 本書のみで容易に対策できる。

「確率が苦手」という人でも大丈夫だ。「統計」の確率は, 統計の問題を解かせるためのものなので, 数学 A の確率よりずっと易しい。確率を難しくしたらその後の統計の設問が無駄になってしまうからだ。

補足

本書を勉強した後, 姉妹編である「共通テスト総合問題集 数学 II・B・C」(河合出版)により, 70分(数学 II, B, C の試験時間)で解く練習をしよう。そうすれば, 共通テスト対策は完璧である。

著者記す

目次

第1章 基本事項と練習問題	7
1.1 平均, 分散, 標準偏差	8
1.2 平均と分散の公式～いつでも成り立つもの	14
1.2.1 aX や $X+b$ の平均, 分散の例	14
1.2.2 平均の公式～いつでも成り立つもの	15
1.2.3 分散の公式～いつでも成り立つもの	18
1.3 平均と分散の公式の重要な応用～仮平均	25
1.4 独立な確率変数で成り立つ公式	30
1.4.1 「独立な確率変数」の意味と例	30
1.4.2 「独立な確率変数」の定義	30
1.4.3 独立な確率変数で成り立つ公式	31
1.5 二項分布	39
1.5.1 反復試行と確率	39
1.5.2 二項分布の定義と例	39
1.5.3 二項分布の平均, 分散, 標準偏差の公式	40
1.6 標準正規分布	45
1.7 正規分布と標準正規分布	57
1.7.1 正規分布	57
1.7.2 正規分布を標準正規分布に変換すること, その応用	57
1.8 二項分布と正規分布	68
1.9 標本調査と標本平均	77
1.9.1 標本調査の用語と具体例	77
1.9.2 標本平均の公式	81
1.10 標本平均と正規分布	86
1.11 母平均の推定	95
1.12 母比率の推定	109
1.13 仮説検定	120
1.13.1 「仮説検定」の“一歩前”	120
1.13.2 仮説検定のまとめ	123
1.13.3 仮説検定～1. 母平均の両側検定	124
1.13.4 仮説検定～2. 母比率の両側検定	129
1.13.5 仮説検定～3. 母平均の片側検定	134
1.13.6 仮説検定～4. 母比率の片側検定	139
1.14 確率密度関数の定義と目的	148
1.14.1 相対度数のヒストグラムから確率密度関数へ	148

1.14.2	確率密度関数を考える目的	151
1.14.3	確率密度関数の具体例	151
1.15	連続型確率変数の平均と分散	158
1.15.1	$\int_a^b f(x) dx$ という記号の意味	158
1.15.2	連続型確率変数の平均	161
1.15.3	連続型確率変数の平均の例	162
1.15.4	平均の計算テクニック～平均と重心	163
1.15.5	平均を求めるテクニックの注意!	166
1.15.6	連続型確率変数の分散	166
1.15.7	分散を計算しやすくする公式	168
1.16	補足1～「標本分散の平均」と「標本平均の分散」	174
1.16.1	標本分散の平均～基本問題	174
1.16.2	標本分散の平均～母集団が標本より十分大きい場合	178
1.16.3	不偏分散の性質	179
1.16.4	標本分散の平均、不偏分散の平均	190
1.16.5	標本平均の分散～一般形	192
1.17	補足～重心の理論的解説	196
1.17.1	平面図形の重心の素朴な定義	196
1.17.2	平面図形の重心の計算しやすい定義	198
1.17.3	三角形の重心を定積分で確認	201
1.17.4	図形が線対称の場合の重心を定積分で確認	204
1.17.5	連続型確率変数の平均は重心の x 座標	205
1.17.6	おまけ1～ライブニッツの dx とは何か	206
1.17.7	おまけ2 (数Ⅲ履修者向け)～バームクーヘン公式とバップス・ギュルダンの定理は同じもの	211

第2章	共通テスト対策演習問題 (14題)	215	
第1回	216	第2回	219
第3回	222	第4回	225
第5回	228	第6回	231
第7回	234	第8回	236
第9回	238	第10回	241
第11回	244	第12回	247
第13回	250	第14回	253

1.1 平均, 分散, 標準偏差

この節の概要

数学I「データの分析」で学んだ平均, 分散, 標準偏差を統計で扱いやすいように定義し直す.

取り得る値のそれぞれに対し, その値を取る確率が決まっている変数を**確率変数**という.

以下では, 確率変数 X のとりうる値が $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ であるとし,

$$P(X=x_k) = p_k \quad (X=x_k \text{ となる確率だよ})$$

とする. このとき

平均の定義

X の平均 (平均値, 期待値) は,

$$E(X) = \sum_{k=1}^n x_k p_k = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$$

つまり, X の平均は

「 $(X$ のとりうる値) \times (その値をとる確率)」をすべて足したもの

となる.

(意味) X の平均 $E(X)$ は, 「 X がとりうる値はだいたいどれぐらいか」を表す.

(例1)

1枚の硬貨を2回投げ, 表の出た回数を X とすると, $X=0, 1, 2$ であり, その確率は次の表ようになる. (この表を**確率分布表**という)

X	0	1	2	計
確率 P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

よって, X の平均 $E(X)$ は

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1$$

(注) 数学I「データの分析」での平均と定義が少し違う. という話は2ページ後の**補足**で解説する.

- (2) 以下の問題では、必要に応じてこの問題の最後にある正規分布表を用いてよい。

母平均が m である母集団から大きさ 400 の標本を無作為に選んだところ、標本平均が \bar{X} 、標本標準偏差が S となった。

このとき、 m に対する信頼度 95 % の信頼区間は であり、信頼度 99 % の信頼区間は である。, に当てはまる最も適切なものを、次の①～⑤のうちから一つずつ選べ。ただし、同じものを繰り返し選んでもよい。

- ① $\bar{X} - 0.95S \leq m \leq \bar{X} + 0.95S$ ① $\bar{X} - 0.99S \leq m \leq \bar{X} + 0.99S$
 ② $\bar{X} - 1.96S \leq m \leq \bar{X} + 1.96S$ ③ $\bar{X} - 2.58S \leq m \leq \bar{X} + 2.58S$
 ④ $\bar{X} - 0.098S \leq m \leq \bar{X} + 0.098S$ ⑤ $\bar{X} - 0.129S \leq m \leq \bar{X} + 0.129S$

で選んだ信頼度 99 % の信頼区間を $A \leq m \leq B$ と表す。

n は十分大きいものとし、この母集団から大きさが n の標本を無作為に選んだところ、標本標準偏差は S とほぼ等しくなった。

さらに、この標本から母平均 m に対する信頼度 99 % の信頼区間を求めたところ $C \leq m \leq D$ となり、

$$\frac{D - C}{B - A} = \frac{1}{2}$$

となった。

この n の値はほぼ である。 に当てはまる最も適切なものを、次の①～③のうちから一つ選べ。

- ① 100 ① 200 ② 800 ③ 1600
 (次ページに続く。)

Y の分散 $V(Y)$ は

$$\begin{aligned} V(Y) &= V(3-X) \\ &= (-1)^2 V(X) \\ &= \frac{\overset{\text{ソ}}{9}}{\underset{\text{タチ}}{25}} \quad (\text{②より}) \end{aligned}$$

分散の公式

$$V(aX+b) = a^2 V(X) \quad (a, b \text{ は定数})$$

- (2) 母平均が m である母集団から大きさが 400 の標本を無作為に選んだ標本平均が \bar{X} である。

母標準偏差を σ とすると、400 は十分大きいので \bar{X} は正規分布 $N\left(\frac{m}{\text{平均}}, \frac{\sigma^2}{400}\right)$ に近似的に従う。

重要!! 母平均が m 、母分散が σ^2 の母集団から大きさ n の標本を無作為に選ぶとき、 n が十分大きければ、標本平均 \bar{X} は

・平均が m

・分散が $\frac{\sigma^2}{n}$

の正規分布 $N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ に近似的に従う。

\bar{X} の標準偏差は $\sqrt{\frac{\sigma^2}{400}} = \frac{\sigma}{20}$ である。

標本の大きさが十分大きいので、母標準偏差 σ は標本標準偏差 S にほぼ等しいとしてよいから、 \bar{X} の標準偏差は $\frac{S}{20}$ としてよい。

よって、標本平均 \bar{X} は平均が m 、標準偏差が $\frac{S}{20}$ の正規分布に従うとしてよい。…………… ③

\bar{X} が正規分布に従うので

$$z = \frac{\bar{X} - (\bar{X} \text{の平均})}{(\bar{X} \text{の標準偏差})} = \frac{\bar{X} - m}{\frac{S}{20}} \quad \dots\dots\dots ④$$

重要!! 正規分布表を使うためには、標準正規分布に従う z を考える。

とおくと、 z は標準正規分布に従う。

m に対する信頼度 95% の信頼区間を得るには、まず

$$P(-z_0 \leq z \leq z_0) = \frac{95}{100} = 0.95 \quad \dots\dots\dots ⑤$$

となる z_0 を以下のようにして求める。

step1 この確率は次の図 (標準正規分布) の斜線部