Introduction

多くの学生（高校生・浪人生）から「数学の学力が伸びない」「模試で最後の(3)の問題が解けない」といった相談を受けることがよくある．教育に携わる者なら誰しも経験する話だが，ふと「なぜ，そのようなことが起こるのか？」と考えることがある．彼等の相談の内容から感じることは，「やり方（質）」の改善箇所があることと，「量」の少なさである．

下の表で，多くの学生の状況と数学ができる学生の状況の一例を紹介しよう．

多くの学生の状況	数学ができる学生の状況
予習はざっと見て解く程度．	予習でわからないところは，教科書などで公式や解法を調べる．
授業は聞いて理解．	授業でわからないところは，後で友達や先生に質問．
ノートは板書を写す．	ノートは，後からの復習を考えて，見やすく整理してとる．
復習は１回やればよい方．	復習は，「公式の確認や証明」などを含めテストの４日前までに一通りやり，残りの３日間でわからないところを復習する．
テスト勉強は数日前から始める．	

上の表を見ると，君は"ドキッ"とするかもしれない．他教科の勉強，部活，リラックスと，やりたい事は沢山ある．そのため，数学の勉強はある程度のところまで進めば，そこで終わらせてしまい，本来やるべき勉強量にいたらない．また正しい勉強方法で勉強しようにも，何をどう勉強したらいいのかが分からず，目先の宿題に取り組むだけで終わってしまっていることも……．

このような状況をまとめると，「数学の学力が伸びない」原因の多くは，勉強の「やり方（質）」と「量」に課題がある．

数学の学力を伸ばすために，「やり方（質）」と「量」に関して，次の３つのことが「必要」である．

『数学の効果的な学習』

① **基本事項** プレックス(Prex)【証明・説明】
公式・定理などの確認と証明

⇕

② **問題演習** 問題集【基礎・標準・応用】
具体的な問題で基本事項と問題演習のつながりを確認

⇩

③ **反復練習** 復習をする．理系(3回)，文系(5回)．
復習のタイミングはできるだけ早く．

①〜③の中で，本書の立ち位置は，

「公式」「定理」「数学的な考え方」の
「証明(Proof)」と「説明(Explanation)」

に特化した「①基本事項」の参考書である．**「基本は，発展の始まり！」**であり，「①基本事項」は発展問題や数学の根本理解を助け，数学の学習の「質」を高めるのに役立つ．多くの問題集は「②問題演習」に特化している．さらに，「量」を確保するために複数回の「③反復練習」が必要であり，「③反復練習」がなければ，せっかく勉強した内容も定着しない．

「①基本事項（数学の基礎・基本）」を知り，「②問題演習」をし，「③反復練習」をすれば，数学の学習の「質」と「量」は確保され，多くの学生の課題は解決されるだろう．「質」を確保するためにも，本書を「②問題演習」と共に活用してほしい．

•「練習問題」について

基本事項の証明や説明を読んだ後に簡単な問題（「練習問題」）を用意してある．内容の理解につながるので，解説を読んだ後に是非取り組んでほしい．

•「【発展】項目」について

【発展】としている項目がある．これは，数学的に難しい内容や文系の学生（数学Ⅰ・A・Ⅱ・Bのみを履修している人）にとって範囲外である内容を含むことを表す．しかし，数学的には大切なものも含むので，心して取り組んでほしい．

最後に，本書の製作にご協力いただいた河合塾数学科の講師の皆様，河合出版の編集部，教え子の柴田君，心から感謝申し上げます．この本で多くの学生の課題が解決されることを願う．

2019年4月

プレックス製作委員会

Contents

はじめに …… 2

数学Ⅰ

数と式

因数分解(たすき掛け) …… 10
展開の公式とそこから得られる等式 …… 11
絶対値の性質 …… 12
絶対値のついた方程式，不等式 …… 13
平方根の性質 …… 14
2重根号 …… 15

2次関数

平方完成 …… 16
2次方程式の解(解の公式①) …… 17
2次方程式の解(解の公式②) …… 18
2次方程式の解の個数 …… 19
平行移動(2次関数 $y=a(x-p)^2+q$ のグラフ) …… 20
x 軸に対しての対称移動 …… 21
y 軸に対しての対称移動 …… 22
原点に対しての対称移動 …… 23
2次方程式の重解 …… 24

図形と計量

正弦定理 …… 25
余弦定理 …… 26
$90°-A$ の三角比 …… 27
$180°-\theta$ の三角比 …… 28
三角形の成立条件 …… 29
辺と角の大小関係 …… 30
三角形の面積 …… 31
内接円の半径 …… 32
四角形の面積(対角線の積) …… 33
トレミーの定理 …… 34
ヘロンの公式 …… 35
面積比 …… 36

集合と命題

集合と要素 …… 37
部分集合と空集合 …… 38
共通部分と和集合 …… 39
全体集合と補集合 …… 40
ド・モルガンの法則 …… 41
包除原理 …… 42
命題とその真偽 …… 43
逆・裏・対偶 …… 44
対偶命題と真偽 …… 45
必要条件・十分条件 …… 46
背理法 …… 47
鳩の巣の原理 …… 48

データの分析

四分位数 …… 49
箱ひげ図 …… 50
平均値 …… 51
仮平均法 …… 51
分散①と標準偏差 …… 53
共分散①と相関係数 …… 54
【発展】分散② …… 56
【発展】共分散② …… 57
平均における変量の変換 …… 58
分散・標準偏差における変量の変換 …… 59
共分散における変量の変換 …… 60

数学A

場合の数

和の法則 …… 61
積の法則 …… 62
順列 …… 63
円順列 …… 64
数珠順列(ネックレスの順列) …… 65

【発展】数珠順列(ネックレスの順列)…66
重複順列……68
同じものを含む順列……69
組合せ……70
$_nC_k$ の性質 ①($_nC_k={}_nC_{n-k}$)……71
$_nC_k$ の性質 ②($k\cdot{}_nC_k=n\cdot{}_{n-1}C_{k-1}$)…72
$_nC_k$ の性質 ③($_nC_k={}_{n-1}C_{k-1}+{}_{n-1}C_k$)……73

確率

確率の定義……74
和事象の確率・確率の加法定理……76
独立な試行……77
余事象の確率……78
反復試行の確率……79
条件付き確率……80
事象の独立……81

整数

約数と倍数……82
素因数分解と最小公倍数,最大公約数…83
最大公約数と最小公倍数の関係……84
倍数の判定法 ①(2の倍数,5の倍数)…85
倍数の判定法 ②(4の倍数,8の倍数)…86
倍数の判定法 ③(3の倍数,9の倍数)…87
正の約数の個数……88
正の約数の総和……89
素数の性質……90
連続する整数の積……91
自然数の積と素因数の個数……92
合同式……94
合同式の性質……95
ユークリッドの互除法……96
【発展】フェルマーの小定理の準備 ①…97
【発展】フェルマーの小定理の準備 ②…98
【発展】フェルマーの小定理……99
n 進法 ①……101
n 進法 ②……102
n 進法 ③……103
n 進法 ④……104
有限小数……106
既約分数を小数で表す……107
【発展】一次不定方程式 $ax+by=1$ の解……109

平面図形

三平方の定理(ピタゴラスの定理)…111
中点連結定理……112
角の二等分線(内角)……113
角の二等分線(外角)……114
重心……115
外心……116
内心……117
垂心……118
傍心(ぼうしん)……119
チェバの定理……120
メネラウスの定理……121
円周角の定理……122
円に内接する四角形の性質……123
接弦定理……124
方べきの定理 ①……125
方べきの定理 ②……126
円の接線……127
中線定理(パッポスの定理)……128

数学Ⅱ

式と証明

等式の証明……129
不等式の証明……130
3乗の公式 ①……131
3乗の公式 ②……132
3乗の公式 ③……133
3乗の公式 ④……134
3乗の公式 ⑤……135
二項定理……136
$(a+b+c)^n$ の展開式の一般項(多項定理)……138

0以上の実数の大小と平方の大小 …… 139
三角不等式 …… 140
相加平均と相乗平均の大小関係 …… 142
コーシー・シュワルツの不等式 ① …… 143
コーシー・シュワルツの不等式 ② …… 144

複素数と方程式

共役な複素数の性質 ① …… 145
共役な複素数の性質 ② …… 146
2次方程式の解と係数の関係 …… 147
3次方程式の解と係数の関係 …… 148
共役な複素数解の存在 …… 149
剰余の定理 …… 150
因数定理 …… 151
方程式の有理数解 …… 152

図形と方程式

数直線上の内分 …… 153
数直線上の外分 …… 154
座標平面上における内分点，外分点の座標 …… 155
座標平面上における三角形の重心の座標 …… 156
2点間の距離 …… 157
直線の方程式 …… 158
平行条件 ① …… 159
垂直条件 ① …… 160
平行条件 ② …… 161
垂直条件 ② …… 162
点と直線の距離 …… 163
円の方程式 …… 165
円の接線の公式 ① …… 166
円の接線の公式 ② …… 167
極線 …… 168
交点を通る図形 ①（直線束） …… 169
交点を通る図形 ②（円束） …… 170
平行移動 …… 172
x 軸に関する対称移動 …… 173
y 軸に関する対称移動 …… 174
原点に関する対称移動 …… 175
軌跡 …… 176
領域 ① …… 178
領域 ② …… 179
領域 ③ …… 180

三角関数

三角関数の相互関係（一般角） …… 181
$\theta \pm 2n\pi$ …… 182
負角公式（$-\theta$） …… 183
$\theta+\frac{\pi}{2}$ …… 184
$\frac{\pi}{2}-\theta$ …… 185
$\theta+\pi$ …… 186
$\pi-\theta$ …… 187
加法定理（正弦・余弦） …… 188
加法定理（正接） …… 190
2倍角公式 …… 191
3倍角公式 …… 193
積和公式 ① …… 194
和積公式 ① …… 194
積和公式 ② …… 195
和積公式 ② …… 195
半角公式 …… 196
三角関数の合成 ①（正弦） …… 197
三角関数の合成 ②（余弦） …… 198

指数・対数

指数の拡張 ① …… 199
累乗根の性質 …… 200
指数の拡張 ② …… 202
指数の大小 …… 203
対数の公式 ① …… 204
対数の公式 ② …… 205
対数の公式 ③ …… 206
対数の大小と真数の大小の関係 …… 207
常用対数の値 …… 208
桁数 …… 209
小数第 n 位に初めて0でない数が現れる数 …… 210
最高位の数の求め方 …… 211

微分法

微分係数 …… 213
導関数 …… 214
x^n の導関数 …… 215
導関数の性質 …… 216
接線の方程式 …… 217
法線の方程式 …… 218
$f(x)$ の増減と $f'(x)$ の符号 …… 219
極値と導関数の符号 …… 220
【発展】$f''(x)$ の符号と曲線 $y=f(x)$ の凹凸（数学Ⅲの内容を含む） …… 221
【発展】曲線 $y=f(x)$ の変曲点（数学Ⅲの内容を含む） …… 222
【発展】3次関数「対称性（変曲点）」（数学Ⅲの内容を含む） …… 223
【発展】3次関数「1：2」の法則（数学Ⅲの内容を含む） …… 224
【発展】5点定理（数学Ⅲの内容を含む） …… 225

積分法

不定積分 …… 226
定積分 …… 227
x^{2n-1} と x^{2n} と c（定数）の定積分の性質 …… 228
定積分と微分 …… 229
積分と面積 …… 230
2曲線間の面積 …… 231
$\frac{1}{6}$ 公式 ① …… 232
$\frac{1}{6}$ 公式 ② …… 233
$\frac{1}{3}$ 公式 …… 235
$\frac{1}{12}$ 公式 …… 237

数学B

数列

等差数列の一般項 …… 239
等差数列の和 …… 240
等比数列の一般項 …… 241
等比数列の和 …… 242
$\sum$ の性質 …… 243
数列の和の公式 ① …… 244
数列の和の公式 ② …… 245
数列の和の公式 ③ …… 246
階差数列と一般項 …… 247
部分分数分解を利用した和の計算 …… 248
和と一般項 …… 249
$\sum${(等差数列)×(等比数列)} …… 250
漸化式（$a_{n+1}=a_n+d$，$a_{n+1}=ra_n$） …… 251
漸化式（$a_{n+1}=a_n+(n$の式$)$） …… 252
二項間漸化式（$a_{n+1}=pa_n+q$） …… 253
二項間漸化式（$a_{n+1}=pa_n+q^n$） …… 254
二項間漸化式（$a_{n+1}=pa_n+qn+r$） …… 255
三項間漸化式（$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$） …… 257
連立漸化式（$a_{n+1}=pa_n+qb_n$，$b_{n+1}=qa_n+pb_n$） …… 259
連立漸化式（$a_{n+1}=pa_n+qb_n$，$b_{n+1}=ra_n+sb_n$） …… 260
数学的帰納法 ① …… 262
数学的帰納法 ② …… 263
数学的帰納法 ③ …… 264

ベクトル

ベクトルの和と差 …… 265
ベクトルの実数倍 ① …… 266
ベクトルの実数倍 ② …… 267
単位ベクトル …… 268
ベクトルの成分表示 …… 269
ベクトルの平行条件 …… 270
ベクトルの大きさ …… 270
内積と成分表示 …… 271
内積の性質 …… 272
垂直なベクトルと内積 …… 272
内分点の位置ベクトル …… 273

外分点の位置ベクトル …… 274
中点の位置ベクトル …… 275
三角形の重心 …… 276
直線のベクトル方程式 …… 277
共線条件 …… 278
三角形の面積 ①（ベクトル表示）…… 279
三角形の面積 ②（成分表示）…… 280
円のベクトル方程式 …… 281
（空間）ベクトルの大きさ（成分表示） 282
（空間）内積と成分表示 …… 283
平面の方程式 …… 284
共面条件 …… 285
空間における球面の方程式 …… 286

確率分布

確率変数の期待値 …… 287
$aX+b$ の期待値 …… 287
確率変数の分散と標準偏差 …… 288
分散の計算 …… 289
$aX+b$ の分散と標準偏差 …… 290
確率変数の和の期待値（同時分布）… 291
独立な確率変数の積の平均 …… 292
独立な確率変数の和の分散 …… 293
二項分布（平均・分散・標準偏差）… 294

数学Ⅲ

式と曲線

放物線 …… 296
放物線の接線の方程式 …… 297
楕円 …… 298
楕円の接線の方程式 …… 299
双曲線 …… 300
双曲線の接線の方程式 …… 301
双曲線の漸近線 …… 302
楕円の媒介変数表示 …… 303
双曲線の媒介変数表示 …… 304
サイクロイド（Cycloid） …… 305
ハイポサイクロイド（Hypocycloid）… 306
エピサイクロイド（Epicycloid） …… 308
円錐曲線 …… 310
直交座標と極座標 …… 311
極方程式 …… 312

複素数平面

複素数平面の基礎 ① …… 313
複素数平面の基礎 ② …… 314
実部，虚部 …… 315
複素数 z が実数となる条件，純虚数となる条件 …… 316
極形式 …… 317
複素数の乗法，除法 …… 318
原点のまわりの回転 …… 319
原点以外の点のまわりの回転 …… 320
ド・モアブルの定理 …… 321
1 の n 乗根 …… 322
円を表す方程式，垂直二等分線を表す方程式 …… 323
3 点が一直線上にある条件，垂直条件 …… 324
直線の方程式 ① …… 325
直線の方程式 ② …… 326
円の接線の方程式 …… 327
領域 ① …… 328
領域 ② …… 329

極限

数列の極限の性質 ① …… 330
数列の極限の性質 ②（はさみうちの原理） …… 331
不定形 …… 332
数列 $\{r^n\}$ の極限 …… 333
無限等比級数の収束と発散 …… 334
無限級数と一般項の極限 …… 335
無限級数の性質 …… 336

関数の極限 …… 337
左側極限・右側極限と極限値 …… 337
関数の極限の性質 …… 339
関数のはさみうちの原理 …… 340
関数の極限公式 ① …… 341
関数の極限公式 ② …… 343
関数の連続性 …… 345
中間値の定理 …… 346
中間値の定理の利用 …… 346

関数

分数関数のグラフ …… 347
無理関数のグラフ …… 348
逆関数 …… 349
合成関数の性質 …… 350

微分法

微分可能と連続 …… 351
導関数の性質 …… 352
積の微分 …… 353
商の微分 …… 354
三角関数の導関数 …… 355
合成関数の導関数 …… 356
対数関数の導関数 …… 357
絶対値を含む対数関数の導関数 …… 358
x^α の導関数（α は実数） …… 359
指数関数の導関数 …… 359
逆関数の微分法 …… 360
媒介変数表示と導関数 …… 361

微分法の応用

共通接線 …… 362
ロルの定理 …… 363
平均値の定理 …… 365
$f''(x)$ の符号と曲線 $y=f(x)$ の凹凸 …… 366
曲線 $y=f(x)$ の変曲点 …… 367
速度と加速度（数直線上） …… 368
速度と加速度（平面上） …… 369
コーシーの平均値の定理 …… 371
ロピタルの定理 …… 372

積分法

x^α の不定積分 …… 373
三角関数の不定積分 …… 373
指数関数の不定積分 …… 374
$f(ax+b)$ の不定積分 …… 374
置換積分 …… 375
部分積分 …… 376
定積分と導関数 …… 377
区分求積法 ① …… 378
区分求積法 ② …… 379
偶関数と奇関数の定積分 …… 380
定積分と不等式 …… 381
積分の平均値の定理 …… 382
断面積 $S(x)$ と立体の体積 …… 383
回転体の体積 …… 384
円筒積分（バームクーヘン積分） …… 385
曲線の長さ …… 387

練習問題の解答・解説 …… 389

索引 …… 470

数列の極限の性質②（はさみうちの原理）

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$，$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ のとき，

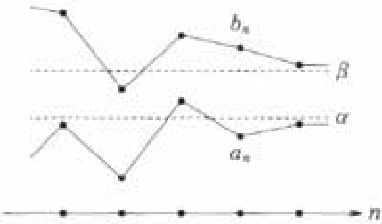
［Ⅰ］ すべての n について $a_n \leqq b_n$ ならば $\alpha \leqq \beta$.

［Ⅱ］ すべての n について $a_n \leqq c_n \leqq b_n$ かつ $\alpha = \beta$ ならば $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$.

説明

［Ⅰ］ すべての n について $a_n \leqq b_n$ が成り立つとき，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は〈図 1〉のように変化する．$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$，$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ であるから，すべての n について，$a_n \leqq b_n$ ならば

$$\alpha \leqq \beta.$$

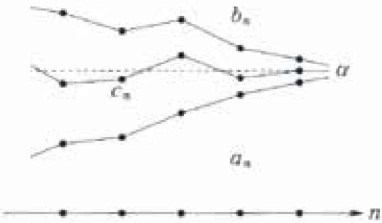


〈図 1〉

［Ⅱ］ すべての n について $a_n \leqq c_n \leqq b_n$ が成り立つとき，数列は〈図 2〉のように変化する．

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha.$$



〈図 2〉

注 ［Ⅱ］の性質を**はさみうちの原理**という．

練習問題 293

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi}{4}$ を求めよ．