はじめに

突然私事ですが，私は大学には最初電子工学科に入学しました．そこで，大学一年生のときに，解析（微分積分学）の先生と日本の最高の古典的名著と言われる高木貞治の『解析概論』を1対1のセミナーで読む幸運に恵まれました．この本を読んでいくなかで，一寸の隙もない透徹した論理，その論理の厳密さ，数学の美しさに感動し，その後数学科に編入しました．

その本で最も感動したのは，第5章の複素数を変数とする関数の「解析関数，とくに初等関数」でした．そこで複素数の関数に魅惑され，大学院では多変数複素数関数論を専攻しました．

また，高木貞治は『代数学講義』の中で「すでに2次方程式を一般的に解くためには，いわゆる虚数が必要であることは早くから認められたのである．…数の範囲を複素数にまで拡張することは，方程式論のみでなく，現今の数学の各部門において肝要であって，実数のみに関する問題においても，それを複素数の立場から考察すると，明瞭に解決される場合が多い．これは次元の拡張であって，あたかも上空から見おろすと，地上の光景が明快に観取されるようなものである．」と述べています．

複素数および複素数平面の発見は，数学において最重要発見の一つです．

そういう意味で，複素数平面には深い思い入れと愛着があり，複素数平面が必要な受験生のみなさんや，その受験生のみなさんたちを指導される先生方にも役に立てればという思いでこの参考書を執筆しました．

本書には，**例題36題，類題38の合計74題**を納めてありますが，一応，有名問題，典型問題は一通り入れたつもりです．

ゲームにしろ，スポーツにしろ，音楽にしろ，勉強にしろ一回だけで身につくものはありません．繰り返せば繰り返すほど上達します．**知ることと，身につけることは違います**．数学の入試は平均するとだいたい100分で4題くらいです．したがって，入試においては初見の問題を1題平均25分くらいで解くことになります．そのためには，まず学習した問題が20分くらいで解答を見ないで解けるようになることが必要です．

そこで，受験生のみなさんは**この参考書の問題がすべて20分くらいで［解答］を見ないで完璧に解けるまで少なくとも3回は繰り返してください**．それでもまだ習得できていないと感じられたら**7回繰り返してください**．そうすれば，必ずしやあなたも複素数平面の達人になれるでしょう．数学が不得意な人は，**数学こそは繰り返せ!!**というのを肝に銘じて下さい．そして，数学を勉強する際は読むのではなく，ノートを作り自分で必ず計算してください．

なお，**（発展）**は最初はとばしてもかまいません．

この参考書を通して受験生のみなさんに，複素数平面って面白いんだなぁ，数学って面白いんだなぁ，と，少しでも感じてもらえたら，望外の幸せです．

なお，最後になりましたが，若くて有能な重光俊佐先生に校正を丹念にみてもらい，貴重なコメントをいただきました．ここに深く感謝の意を表します．また，予備校の授業やテキスト作りで，春期や夏期の授業がないときだけの執筆で遅々として進まない私の執筆を気長に待ってもらった河合出版のみなさんにも感謝します．

2018年 正月　西山清二

目　次

第１章　複素数の絶対値，高次方程式

第２章　*n* 乗根

第３章　複素数平面の図形への応用

第４章　複素数と極限

第５章　写像

例題 19 〈円の方程式，アポロニウスの円〉

(1) a，b は実数の定数で，β は複素数の定数とする．$a \neq 0$，$|\beta|^2 > ab$ のとき，

$$a|z|^2 + \overline{\beta}z + \beta\overline{z} + b = 0$$

を満たす点 P(z) の軌跡は円であることを示し，その中心と半径を求めよ．

(2) 次の式を満たす点 P(z) の軌跡を求めよ．

$$|z-i| = 2|z-1|.$$

（有名問題）

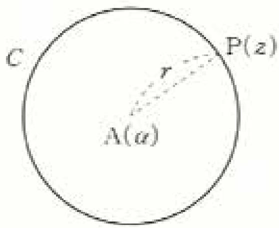
考え方

[円の方程式]

点 A(α) を中心とする半径 r $(r>0)$ の円 C の方程式は

$$C : |z-\alpha| = r \quad \cdots\cdots(*)$$

です．



上の $(*)$ より

$$|z-\alpha|^2 = r^2$$

$$\Longleftrightarrow (z-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha}) = r^2$$

$$\Longleftrightarrow |z|^2 - \overline{\alpha}z - \alpha\overline{z} + |\alpha|^2 - r^2 = 0. \quad \cdots\cdots(*)'$$

(1) の方程式は $(*)'$ で $\alpha = -\dfrac{\beta}{a}$，$\dfrac{b}{a} = |\alpha|^2 - r^2$ としたものですから

$$r^2 = |\alpha|^2 - \frac{b}{a}$$

$$= \left|-\frac{\beta}{a}\right|^2 - \frac{b}{a}$$

$$= \frac{|\beta|^2 - ab}{a^2} > 0.$$

より，$|\beta|^2 > ab$ です．

⬅ $(*)'$ で $b = |\alpha|^2 - r^2$ とおくと $(*)'$ は

$$|z|^2 - \overline{\alpha}z - \alpha\overline{z} + b = 0. \quad \cdots\cdots(**)$$

ただし，b は実数で $r^2 = |\alpha|^2 - b > 0$.

よって，$(**)$ も円 C の方程式である．

【解答】

(1)
$$a|z|^2 + \overline{\beta}z + \beta\overline{z} + b = 0 \ (a \neq 0). \quad \cdots\cdots①$$

① より，

$$z\overline{z} + \frac{\overline{\beta}}{a}z + \frac{\beta}{a}\overline{z} + \frac{b}{a} = 0$$