

はじめに

突然私事ですが、私は大学には最初電子工学科に入学しました。そこで、大学一年生のときに、解析（微分積分学）の先生と日本の最高の古典的名著と言われる高木貞治の『解析概論』を1対1のセミナーで読む幸運に恵まれました。この本を読んでいくなかで、一寸の隙もない透徹した論理、その論理の厳密さ、数学の美しさに感動し、その後数学科に編入しました。

その本で最も感動したのは、第5章の複素数を変数とする関数の「解析関数、とくに初等関数」でした。そこで複素数の関数に魅惑され、大学院では多変数複素数関数論を専攻しました。

また、高木貞治は『代数学講義』の中で「すでに2次方程式を一般的に解くためには、いわゆる虚数が必要であることは早くから認められたのである。…数の範囲を複素数にまで拡張することは、方程式論のみでなく、現今の数学の各部門において肝要であって、実数のみに関する問題においても、それを複素数の立場から考察すると、明瞭に解決される場合が多い。これは次元の拡張であって、あたかも上空から見おろすと、地上の光景が明快に観取されるようなものである。」と述べています。

複素数および複素数平面の発見は、数学において最重要発見の一つです。

そういう意味で、複素数平面には深い思い入れと愛着があり、複素数平面が必要な受験生のみなさんや、その受験生のみなさんたちを指導される先生方にも役に立てればという思いでこの参考書を執筆しました。

本書には、例題36題、類題38の合計74題を納めてありますが、一応、有名問題、典型問題は一通り入れたつもりです。

ゲームにしろ、スポーツにしろ、音楽にしろ、勉強にしろ一回だけで身につくものはありません。繰り返せば繰り返すほど上達します。知ることと、身につけることは違います。数学の入試は平均するとだいたい100分で4題くらいです。したがって、入試においては初見の問題を1題平均25分くらいで解くことになります。そのためには、まず学習した問題が20分くらいで解答を見ないで解けるようになることが必要です。

そこで、受験生のみなさんはこの参考書の問題がすべて20分くらいで[解答]を見ないで完璧に解けるまで少なくとも3回は繰り返してください。それでもまだ習得できていないと感じられたら7回繰り返してください。そうすれば、必ずしやあなたも複素数平面の達人になれるでしょう。数学が不得意な人は、**数学こそは繰り返せ!!**というのを肝に銘じて下さい。そして、数学を勉強する際は読むのではなく、ノートを作り自分で必ず計算してください。

なお、(発展)は最初はとばしてもかまいません。

この参考書を通して受験生のみなさんに、複素数平面って面白いんだなあ、数学って面白いんだなあ、と、少しでも感じてもらえたら、望外の幸せです。

なお、最後になりましたが、若くて有能な重光俊佐先生に校正を丹念にみてもらい、貴重なコメントをいただきました。ここに深く感謝の意を表します。また、予備校の授業やテキスト作りで、春期や夏期の授業がないときだけの執筆で遅々として進まない私の執筆を気長に待ってもらった河合出版のみなさんにも感謝します。

2018年 正月 西山清二

目次

第1章 複素数の絶対値, 高次方程式

例題1	〈絶対値, 共役複素数, 実数条件〉	6
類題1	[絶対値, 実数条件]	8
例題2	〈三角不等式〉	9
類題2	[掛谷の定理]	13
例題3	〈1の3乗根 ω 〉	14
類題3	[1の3乗根]	17
例題4	〈3次方程式の解法〉	18
類題4	[3次方程式の解法]	21
例題5	〈4次方程式の解法〉	22
類題5	[4次方程式の解法]	24
例題6	〈3次方程式の解と係数の関係, 共役解〉	25
類題6	[3次方程式の解と係数の関係, 共役解]	26
例題7	〈ガウスの定理〉	27
類題7	[I][ガウスの定理] [II][Van den Bergの定理]	31
例題8	〈代数方程式の共役解〉	32
類題8	[複素数係数の3次方程式]	35
例題9	〈積に関して閉じた3つの数の集合〉	36
類題9	[α が解 $\Rightarrow \alpha^2$ も解である3次方程式]	38
例題10	〈絶対値, 偏角, ド・モアブルの定理〉	39
類題10	[極形式]	40
例題11	$\langle \sum_{k=0}^n \cos k\theta, \sum_{k=0}^n \sin k\theta \rangle$	41
類題11	$[\sum_{k=0}^n r^k \cos k\theta, \sum_{k=0}^n r^k \sin k\theta]$	44

第2章 n 乗根

例題12	〈 n 乗根〉	45
類題12	[4乗根]	48
例題13	〈1の5乗根〉	49
類題13	[正五角形の作図]	52
例題14	〈1の7乗根〉	53
類題14	[1の7乗根]	55
例題15	〈1の n 乗根〉	56
類題15	[1の5乗根の応用]	61
例題16	〈1の原始6乗根〉	62
類題16	[1の原始6乗根]	64

第3章 複素数平面の図形への応用

例題17	〈正三角形になるための条件〉	65
類題17	[I][三角形の形状決定] [II][複素数平面の応用]	69
例題18	〈図形への応用〉	70

類題18 [図形への応用].....	71
例題19 〈円の方程式, アポロニウスの円〉.....	72
類題19 [アポロニウスの円].....	77
例題20 〈直線の方程式, 平行・直交条件〉.....	78
類題20 [円の接線の方程式].....	81
例題21 〈三角形の外心〉.....	82
類題21 [三角形の外心].....	84
例題22 〈三角形, 四角形の面積〉.....	85
類題22 [平行四辺形の面積].....	90
例題23 〈三角形の相似条件と正三角形〉.....	91
類題23 [三角形の相似].....	94
例題24 〈共線・共円条件〉.....	95
類題24 [共円条件].....	98
例題25 〈トレミーの定理〉.....	99
類題25 [トレミーの定理].....	101
例題26 〈九点円の定理〉.....	102
類題26 [シムソンの定理].....	107

第4章 複素数と極限

例題27 〈複素数列の漸化式〉.....	108
類題27 [複素数列の漸化式].....	110
例題28 〈複素数平面の点列の極限への応用〉.....	111
類題28 [複素数平面の点列の極限への応用].....	114
例題29 〈複素数と無限級数〉.....	115
類題29 [複素数と無限級数].....	118

第5章 写像

例題30 〈1次分数変換〉.....	119
類題30 [1次分数変換].....	125
例題31 〈双曲型の1次分数変換〉.....	126
類題31 [単位円に移す1次分数変換].....	128
例題32 〈 $w = \alpha z + \beta$ 〉.....	129
類題32 [$w = \alpha \bar{z} + \beta$ (線対称移動)].....	133
例題33 〈反転〉.....	134
類題33 [反転].....	136
例題34 〈1次分数変換と領域〉.....	137
類題34 [1次分数変換と領域].....	138
例題35 〈ジュークコフスキー変換〉.....	139
類題35 $\left[w = z + \frac{2}{z} \right]$	143
例題36 〈 $w = \frac{z^2}{2}$, カージオイド〉.....	144
類題36 [$w = z^2 + 3z$, リマソン].....	149

類題の解答と解説.....	151
---------------	-----

例題 19 (円の方程式, アポロニウスの円)

- (1) a, b は実数の定数で, β は複素数の定数とする, $a \neq 0, |\beta|^2 > ab$ のとき,

$$a|z|^2 + \bar{\beta}z + \beta\bar{z} + b = 0$$

を満たす点 $P(z)$ の軌跡は円であることを示し, その中心と半径を求めよ.

- (2) 次の式を満たす点 $P(z)$ の軌跡を求めよ.

$$|z - i| = 2|z - 1|.$$

(有名問題)

考え方

[円の方程式]

点 $A(\alpha)$ を中心とする半径 $r (r > 0)$ の円 C の方程式は

$$C: |z - \alpha| = r \quad \dots\dots(*)$$

です.

上の(*)より

$$\begin{aligned} |z - \alpha|^2 &= r^2 \\ \Leftrightarrow (z - \alpha)(\bar{z} - \bar{\alpha}) &= r^2 \\ \Leftrightarrow |z|^2 - \bar{\alpha}z - \alpha\bar{z} + |\alpha|^2 - r^2 &= 0, \quad \dots\dots(**) \end{aligned}$$

(1) の方程式は(*)で $\alpha = -\frac{\beta}{a}, \frac{b}{a} = |\alpha|^2 - r^2$ としたもので
すから

$$\begin{aligned} r^2 &= |\alpha|^2 - \frac{b}{a} \\ &= \left| -\frac{\beta}{a} \right|^2 - \frac{b}{a} \\ &= \frac{|\beta|^2 - ab}{a^2} > 0. \end{aligned}$$

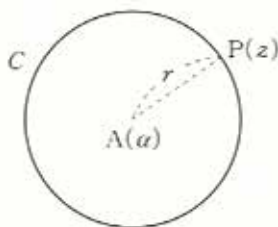
より, $|\beta|^2 > ab$ です.

[解答]

$$(1) \quad a|z|^2 + \bar{\beta}z + \beta\bar{z} + b = 0 \quad (a \neq 0), \quad \dots\dots①$$

①より,

$$z\bar{z} + \frac{\bar{\beta}}{a}z + \frac{\beta}{a}\bar{z} + \frac{b}{a} = 0$$



← (***)で $b = |\alpha|^2 - r^2$ とおくと(*)は

$$|z|^2 - \bar{\alpha}z - \alpha\bar{z} + b = 0. \quad \dots\dots(***)$$

ただし, b は実数で

$$r^2 = |\alpha|^2 - b > 0.$$

よって, (***) も円 C の方程式である.