はじめに

この問題集は数学Ⅲで出題される内容をすべて網羅するものではありません．出るか出ないかわからない雑多な事柄で頭をいっぱいにしてしまって，自分が何を勉強しているのかわからなくなっている人もいるかもしれませんね．すべての状況を想定してあれやこれやと内容をよく理解しないまま数多くの問題を練習しても，結局ほとんど力をつけられないままで本番の試験にのぞまなければならないということが多いのではないでしょうか．

この分野の出題傾向は，昔からそうなんですが，学校の教科書でやるレベルの問題から，こんな問題ほんとうに時間内で解ける人がいるのかなと思わせるような難しい問題までさまざまです．

この問題集は，あまりいろいろと手を広げずに，あくまでも微積分の考え方を身につけていただくことをめざして作りました．基礎はある程度できているという前提で問題を選びましたが，易しいものから難しいものまであまり先入観なしに選びました．難しいといってもこれが入試の現状です．いつも易しい問題だけ解いて満足していても仕方がないと思います．難しい問題も避けて通るわけにはいかないのです．さっぱりわからない，手がつかないとすぐにあきらめないで，じっくりと考える．それこそがほんとうの力をつける唯一の道だと思います．

解答解説編で，**【解答】**のあとにある**話題と研究**は，学習に疲れた人がお茶の時間にするときのお話だと思ってまずは気楽に読んでください．時には勇み足的にレベルの高い内容が含まれることもありますが，よくわからないとか，興味がないときは読み飛ばしていただいても特に初めのうちはさしつかえありません．巻末の「**さらに知りたい人のために**」についても同様です．とは言っても，せっかく貴重な時間をたくさんとってする数学の勉強ですから，ただ問題を解くことだけに終始してしまうのもつまらないと思います．この２つのコーナーには，数学の好きな人なら，きっと気に入っていただける内容が入っているはずです．

問題番号に†（ダガー）のついた問題は（やや）難しいので，あと回しにした方がいいかもしれません．また第１章の**極限**は，解答上いろいろな手法が使われるので，最後にやる方がよいと思います．

がんばって勉強してください．

著者記す．

目　次

7.

【解答】

(1)
$$n\log n>(n-1)\log(n+1) \qquad \cdots ①$$
を示せばよいが，$n=2$ のとき，
$$2\log 2=\log 4>\log 3=(2-1)\log 3$$
で ① は成立し，$n\geqq 3$ のとき，
$$\begin{aligned}&(n-1)\{\log(n+1)-\log n\}\\&=(n-1)\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\,dx\\&<(n-1)\int_n^{n+1}\frac{1}{n-1}\,dx=1<\log n\end{aligned}$$
より ① は成立する．

(2) ① より，$n^n>(n+1)^{n-1}$ $(n=2,\ 3,\ \cdots)$．$n\geqq 3$ のとき，
$$2^2\cdot 3^3\cdot 4^4\cdot\cdots\cdot(n-1)^{n-1}>3^1\cdot 4^2\cdot 5^3\cdot\cdots\cdot n^{n-2}.$$
$$2^2\cdot 3^2\cdot 4^2\cdot\cdots\cdot(n-1)^2>n^{n-2}.$$
$$\therefore\quad (n!)^2>n^n.$$

話題と研究

(2) の不等式
$$(n!)^2>n^n$$
は (1) の結果を使わないで直接示すこともできます．

n が自然数のとき，n より小さい 2 以上の自然数 k に対して，
$$\begin{aligned}k(n-k+1)&=k(n-k)+k\\&>(n-k)+k\\&=n\end{aligned}$$
ですから，
$$\begin{aligned}&\{1\cdot n\}\{2(n-1)\}\{3(n-2)\}\cdots\{(n-1)\cdot 2\}\{n\cdot 1\}\\&>\underbrace{n\cdot n\cdot n\cdot\cdots\cdot n}_{n\text{ 個}}\end{aligned}$$
より $(n!)^2>n^n$ を得ます．さて，$n!$ も n^n も増加速度がとても大きいのですが，これら 2 つにはどういった関係があるのでしょうか．

$n!<n^n$ は明らかですから $(n!)^2>n^n$ とにより，
$$n!<n^n<(n!)^2.$$
この不等式を順次変形していくと，

さらに知りたい人のために

11.

[(話題と研究)のチャレンジ問題の解答]

まず $a_1=1-\log 2$ が題意を満たす a_1 の1つであることを示す．

$n \geqq 2$ のとき，

$$
\begin{aligned}
&(1-\log 2)-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\\
&=-\log 2+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\\
&=\int_0^1\left\{-\frac{1}{1+x}+1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^{n-1}x^{n-1}\right\}dx\\
&=\int_0^1\left\{-\frac{1}{1+x}+\frac{1-(-x)^n}{1+x}\right\}dx\\
&=\int_0^1\frac{-(-x)^n}{1+x}dx.
\end{aligned}
$$

ここで，これを b_n ($n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$) とおくと，$b_{2m-1}>0$，$b_{2m}<0$ であることがわかるから，$n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$ において $a_n=b_n$．

次に $a_1=1-\log 2$ に限ることを示す．$a_1=1-\log 2+\alpha$ が題意を満たすとすると，$a_n=\alpha+b_n$ ($n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$)．

ところで，問題11の【解答】(2) (p.15) によると，$\lim_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim_{n\to\infty}b_n=0$ であるから $\alpha=0$ である．したがって a_1 は $1-\log 2$ に限る．

20.

[(話題と研究)のチャレンジ問題の解答]

$f(x)=\log x$ ($x>0$) とすると

$$f'(x)=\frac{1}{x},\quad f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$$

であるから，イェンゼンの不等式 (p.32) において

$$t_i=x_i \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

とすると，