はじめに

現代の数学を学ぶうえで，高等学校で学ぶ数列の知識を欠くことはできません．

高等学校の教科書で学ぶ数列の内容をみなさんがきちんと理解して，さらに高度な内容へスムーズに発展させるには，みなさんにどのような勉強をしてもらうのが効果的であるか，私は考えてきました．もちろん，それには希望の大学に合格することも含まれています．

そのような考えをつきつめて作ったのが，この問題集です．

この問題集では，数列について100題の問題を解説していきます．教科書の理解を深めるための問題から，最近の大学入試の傾向を反映させた問題まで，難度と内容に従って分類してあります．みなさんの勉強の進み具合や実力に応じて，この問題集のどこから取り組んでもらってもよいでしょう．例えば，数列についてある程度自信をもっている人であれば，第2章から始めてもらって構いません．ただし，その場合でも第1章のうち**例題 20**，**練習 20**，**例題 21**，**練習 21** の4題は取り組んでください．

問題の解説の部分では，図や表を多く利用しています．特に第2章の解説では，図がみなさんの理解の助けになるはずです．

この問題集を活用して，数列について教科書だけでは手の届かない高度な実力を身につけてください．

鈴木　克昌

おことわり

解説の表記はおおむね日本の高等学校の数学教科書を参考にしました．ただし論理の流れを明確にするために

$\therefore$ （…であるから…）

という記号を用いました．前の内容から $\therefore$ 以降の内容が導かれることを意味します．

目　次

第1節　等差数列・等比数列

❶ 初項が a，公差が d の等差数列

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ a+4d,\ \cdots$$

の第 n 項を a_n，初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$\boxed{\begin{aligned} &a_n=a+(n-1)d \\ &S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2} \end{aligned}}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

初項が a，末項が l，項数が n の等差数列

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ \cdots,\ l-2d,\ l-d,\ l$$

の和を S とすると

$$\boxed{S=\frac{n(a+l)}{2}}$$

これは $S=\dfrac{a+l}{2}\times n$ つまり（初項と末項の平均）×（項数）と覚えてもよい．

❷ 初項が a，公比が r の等比数列

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ \cdots$$

の第 n 項を a_n，初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$\boxed{\begin{aligned} &a_n=ar^{n-1} \\ &S_n=\begin{cases} \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r} & (r\neq 1 \text{ のとき}) \\ na & (r=1 \text{ のとき}) \end{cases} \end{aligned}}$$

$$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

❸ 3つの数 a，b，c がこの順に等差数列をなす条件は

$$2b=a+c$$

これは $b=\dfrac{a+c}{2}$（中央の項が両端の相加平均に一致する）と覚えてもよい．

❹ 0でない3つの数 a，b，c がこの順に等比数列をなす条件は

$$b^2=ac$$

まずここを理解しよう

初項が a，公比が r の等比数列は次のようになります．

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ \cdots,\ ar^{n-1},\ \cdots$$
$$\times r\quad \times r\quad \times r\qquad\quad \times r$$

4 番目の項は a に r を 3 回掛けて得られるので，ar^3 となります．

$n \geqq 2$ とします．n 番目の項は a に r を $n-1$ 回掛けて得られるので ar^{n-1} となることがわかります．これは $n=1$ でも成り立っています．

では，この数列の初項から n 番目の項までの和

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \qquad \cdots ①$$

は簡単にすると，どうなるでしょうか．① とその両辺に公比 r を掛けた式を並べて，それら 2 式の辺々を引くと次のようになります．

$$\begin{array}{rl} S_n = & a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \\ -)\ rS_n = & \phantom{a+{}} ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \\ \hline (1-r)S_n = & a + \ 0 + \ 0 + \cdots + \ 0 \ - ar^n \end{array}$$

したがって

$$(1-r)S_n = a(1-r^n) \qquad \cdots ②$$

が導かれます．

もし，$r \neq 1$ ならば ② の両辺を $1-r$ $(\neq 0)$ で割って

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

もし，$r=1$ ならば ① から $S_n = a + a + a + \cdots + a$ (n 個の和) となって

$$S_n = na$$

これらをまとめて，左側のページの ❷ となります．

第 1 節　等差数列・等比数列

練習 1

(1)　$a_n = pn + q$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ であるから

$$a_{n+1} = p(n+1) + q = pn + (p+q)$$

　したがって

$$a_{n+1} - a_n = \{pn + (p+q)\} - (pn+q)$$
$$= p$$

となり，この値は n によらず一定である．

注 $a_n = pn + q$ の n を $n+1$ に書き換えました．

(2)　$4m \leqq x \leqq m^2$ を満たす整数 x の個数が 33 であるから

$$m^2 - 4m + 1 = 33$$

　したがって $m^2 - 4m - 32 = 0$ となって

$$(m-8)(m+4) = 0$$

　m は 4 以上の整数であるので

$$m = 8 \qquad \cdots(答)$$

注 m，n が $m < n$ を満たす整数であるとき，不等式
$$m \leqq x \leqq n$$
を満たす整数 x の個数は
$$n - m + 1$$
です．

練習 2

(1)　数列 1，3，5，7，… は初項が 1，公差が 2 の等差数列である．その第 n 項は

$$1 + 2(n-1) = 2n - 1$$

であるので

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = \frac{n\{2 \cdot 1 + 2(n-1)\}}{2}$$
$$= n^2 \qquad \cdots(答)$$

注 $1+3+5+\cdots+(2n-1)$ の最後の項が，先頭から数えて n 番目であることを確認しています．

【別解】　初項が 1，末項が $2n-1$，項数が n である等差数列の和を求めることにより

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = \frac{n\{1 + (2n-1)\}}{2}$$
$$= n^2 \qquad \cdots(答)$$

注 初項が a，末項が l，項数が n の等差数列の和は
$$\frac{n(a+l)}{2}$$
です．

(2)　数列 1，$\frac{1}{2}$，$\left(\frac{1}{2}\right)^2$，$\left(\frac{1}{2}\right)^3$，… は初項が 1，公比が $\frac{1}{2}$