はじめに

大学入試数学と，教科書で学ぶ高校数学との間にはかなりのレベル差があるから，合格するためには，そのギャップを埋めるための有効な早期入試対策が必要になります．

難関大学の入試対策は，ただひたすら多くの難問に挑んで解けばよいというものではありません．また，つまらない問題をいくら解いてみたところで大学入試問題を解くための真の学力向上は望めません．したがって，難関大学入試の頻出重要問題を確実に解く学力を，短期間でいかに効率よく修得するかが，入試突破の鍵になります．

難関大学入試ともなれば，問題の核心を見抜く洞察力，広い視野から問題にアプローチできる柔軟な発想力，結論を導き出すための正確な論証力と計算力が要求されます．ところが，市販の問題集は入試問題を羅列しただけのものが多く，その解答も，答だけのものや，途中が詳しくないもの，ただ一通りの解答だけのものや，略解程度の別解しかないものが殆どです．そのため，解答を見てもよくわからないとか，自分の解法で行き詰り，その後をどうすればよいのか，など受験生からよく質問を受けます．また，数学Ⅲまで入った理系ハイレベル受験生用のまとまったわかりやすい問題集を紹介して欲しいとよく頼まれますが，なかなか手頃なものが見当たりません．

そこで，この要望に答えるために，難関大学の入試の合否を左右する頻出重要問題で，柔軟な発想力と数学的センスを磨くための良問 200 題（50 例題 + 150 演習問題）を精選し，問題解法のアプローチの仕方に重点を置き，一般性があって応用範囲の広い解法はできるだけ多く取り入れて作成したのが，この問題集です．

この問題集の 200 題をきちんと学習すれば，優に 500 題に相当する良問を学習したのと同じ学習効果が得られ，どんな難関大学の入試にも十分対応できると確信しています．無味乾燥になりがちな受験勉強に色々な発想の工夫をする楽しみを味わいつつ，数学の真の実力を自然に身につけ，合格の栄冠に輝かれることを期待しています．

三ッ矢和弘

もくじ

本書の特色と学習法

特色

本書は，50 の例題（小問集合を含む）と 150 の演習問題を学習効果を配慮して 15 章に振り分けて構成してあります．

(1) 理系ハイレベル受験生に欠かせない 50 の例題

50 の例題は，理系ハイレベル受験生必須の重要典型問題を選んであります．必ず全問に目を通し，解法のポイントが定着するまで学習して下さい．なお，例題の下の考え方で，解法の着眼点･道具をワンポイントで示しました．

(2) 計算力・論証力・発想力・数学的センスを磨く 150 の演習問題

演習問題は，理系ハイレベル受験生として必須の計算力，論証力，発想力を養い，数学的センスを磨くための良問で，頻出・重要問題から厳選した 150 題です．

問題番号の右上の＊印は「やや難」，†印は「難」であることを示します．

＊印や†印の問題は，学力がまだ十分でない人が 1 回目の学習をするときは飛ばしても構いませんが，学習が一通り進めば 2 回目にはできるだけ解くようにして下さい．

(3) 解き方の全てを見せます＝ 200 題全問の，多彩な解法

例題・演習問題の全 200 題に対して，自然な標準解答は勿論のこと，いろいろなアプローチの仕方による重要で応用範囲の広い実戦的な別解はできるだけ多く取り入れ，知っていると有利な重要事項の解説を適宜入れました．また，各自で自習できるように，簡潔でわかり易い解答を書くように心掛けました．これらは，従来の市販の問題集では得られなかったもので，本問題集の最大の特色です．

学習法

(1) 一応各章は独立していますから，履修済みの分野ならどの章から学習を始めても構いません．学習する際，興味を持続しながら集中して能率よく学ぶことが大切です．

得意分野から学習を進めるとか，あるいは得意分野と不得意分野を交互に気分を一新しながら“めりはり”をつけて学習するのも有効な学習方法です．

第1章は難しいから後回しにするのも一つの方法です．

(2) 本問題集はある一定レベル以上の内容のある良問を揃えていますから，問題を解くのにそれなりの学力と気力と時間が必要です．

初めはつまらない計算ミスや勘違いも多く，訓練不足のため解けない問題が多いかも知れませんが，しばらく良問につきあって取り組んでいるうちに，慣れてきます．

解けない問題は，解答をよく読み，問題の本質や解答の流れをよく理解し，なるほどこうすればうまく解けるのかと感動しながら学習が進められれば学力はそのうち自然と身についてきます．

また，学習する際，完璧主義はよくありません．各章の重要概念が理解でき，7，8割が解けるようになれば解けない問題や分らない箇所が残っていても，取り敢えず次の章に進むようにし，一通りまず15章全体をやりきるように心掛けて下さい．そうすれば，2回目はかなりのスピードで15章を学習できるようになり，解けない問題も少なくなるはずです．大体2，3回やれば自信もつき，学力も向上しますから，それを信じて学習して下さい．

(3) できるだけ自分の解答ができてから，**【解答】**を見るように心掛けて下さい．しかし，1題につき40分程度考えてもわからなければ**【解答】**を見て理解すればよいでしょう．理系ハイレベル入試問題1題当たりの解答所要時間は大体25〜30分位ですから，40分以上長々と1問に時間を掛けるのは入試に関する限り時間の無駄です．時には，難問に挑戦し時間が掛かっても解けたときの喜びを味わうことも大切ですが，だらだらと時間を掛けて解く悪い習慣が身につくのはよくありません．入試は限られた時間内での勝負ですから，問題の核心を突いたアプローチをするように心掛けて下さい．同じ問題でもアプローチの仕方によって難易度や計算量が随分変わります．別解を開拓することで解ける問題の範囲が飛躍的に広がり多大な学習効果が得られます．別解を流し読みし，それを吸収するのも大切な学習法で，それによって，柔軟な発想力や数学的センスが養われます．

なお，本問題集である程度自信がついた人は，志望大学の過去問を7年分位解き，自分の思考回路を志望大学向きに調整して入試本番に臨まれることを勧めます．

（注） 大学入試問題文を変更したり，問題の一部を省略または追加したものがあります．その度合の大きい場合に大学名の後に「改」を付しました．

$$=1. \qquad \therefore \quad |\omega|=1.$$

よって，f は C を C に移す．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（終）

(2)　$$|\omega|^2-1=\lambda\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\cdot\overline{\lambda}\frac{\overline{z}-\overline{\alpha}}{1-\alpha\overline{z}}-1=\lambda\overline{\lambda}\frac{z\overline{z}-\overline{\alpha}z-\alpha\overline{z}+\alpha\overline{\alpha}}{1-\overline{\alpha}z-\alpha\overline{z}+\alpha\overline{\alpha}z\overline{z}}-1$$

$$=\frac{z\overline{z}+\alpha\overline{\alpha}-1-\alpha\overline{\alpha}z\overline{z}}{1-\overline{\alpha}z-\alpha\overline{z}+\alpha\overline{\alpha}z\overline{z}} \quad (\because\ \overline{\lambda}\lambda=|\lambda|^2=1)$$

$$=\frac{(1-z\overline{z})(\alpha\overline{\alpha}-1)}{(1-\overline{\alpha}z)(1-\alpha\overline{z})}=\frac{(1-|z|^2)(|\alpha|^2-1)}{|1-\overline{\alpha}z|^2}.$$

よって，　$|\alpha|<1$ ならば，$|z|-1$ と $|\omega|-1$ は同符号，
　　　　　$|\alpha|>1$ ならば，$|z|-1$ と $|\omega|-1$ は異符号

であるから，題意は成り立つ．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（終）

(3)　$$f(3)=\lambda\frac{3-\alpha}{1-3\overline{\alpha}}=3, \quad f(1)=\lambda\frac{1-\alpha}{1-\overline{\alpha}}=-1$$

をみたす λ, α を求めればよい．この両式より

$$\lambda=\frac{3(1-3\overline{\alpha})}{3-\alpha}=\frac{\overline{\alpha}-1}{1-\alpha}. \ (\alpha\neq1,\ 3) \qquad \cdots②$$

$$\therefore \quad 3(3\overline{\alpha}-1)(\alpha-1)+(\alpha-3)(\overline{\alpha}-1)=0.$$

$$\therefore \quad 5\alpha\overline{\alpha}-2\alpha-6\overline{\alpha}+3=0.$$

ここで，$\alpha=x+yi$（x, y：実数）とおくと，

$$5x^2-8x+3+5y^2+4yi=0 \iff 5x^2-8x+3=0,\ y=0.$$

$$\therefore \quad x=1,\ \frac{3}{5}\ ;\ y=0. \quad \therefore \quad \alpha=x+yi=\frac{3}{5}. \ (\because\ \alpha\neq1)$$

これと，② より，$\lambda=-1$.

$$\therefore \quad f(z)=-1\cdot\frac{z-\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}z}=\frac{5z-3}{3z-5}.$$　　（答）

演習問題

99　実数係数の 3 次方程式

$$x^3+x^2-x+a=0$$

が絶対値 1 の虚数解をもつとき，a の値と 3 つの解を求めよ．　　　　（九州大）

100　$\alpha=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$ のとき，

$$\frac{1}{2-\alpha}+\frac{1}{2-\alpha^2}+\frac{1}{2-\alpha^3}+\frac{1}{2-\alpha^4}$$

の値を求めよ．　　　　（青山学院大）

100 【解答 1】

$$\alpha^5=\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)^5=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$$

であることに注目すると，

$$(与式)=\left(\frac{1}{2-\alpha}+\frac{1}{2-\alpha^4}\right)+\left(\frac{1}{2-\alpha^2}+\frac{1}{2-\alpha^3}\right)$$

$$=\frac{4-(\alpha+\alpha^4)}{5-2(\alpha+\alpha^4)}+\frac{4-(\alpha^2+\alpha^3)}{5-2(\alpha^2+\alpha^3)}.$$

また，　$\alpha^5-1=(\alpha-1)(\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1)=0$　$(\alpha\neq1)$

$$\iff \alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=0. \qquad \cdots①$$

ここで，$\alpha+\alpha^4=A$，$\alpha^2+\alpha^3=B$ とおくと，

$$A+B=\alpha+\alpha^4+\alpha^2+\alpha^3=-1,\ (\because ①) \qquad \cdots②$$

$$AB=(\alpha+\alpha^4)(\alpha^2+\alpha^3)$$

$$=\alpha^3+\alpha^4+\alpha^6+\alpha^7=\alpha^3+\alpha^4+\alpha+\alpha^2=-1.$$

$$\therefore\ (与式)=\frac{4-A}{5-2A}+\frac{4-B}{5-2B}=\frac{40-13(A+B)+4AB}{25-10(A+B)+4AB}$$

$$=\frac{40-13\cdot(-1)+4\cdot(-1)}{25-10\cdot(-1)+4\cdot(-1)}=\frac{49}{31}. \qquad (答)$$

【解答 2】

$$2^5-(\alpha^k)^5=(2-\alpha^k)(2^4+2^3\cdot\alpha^k+2^2\cdot\alpha^{2k}+2\cdot\alpha^{3k}+\alpha^{4k}).$$

この左辺は，$\alpha^5=1$ より $2^5-(\alpha^k)^5=32-1=31$ だから，

$$\frac{1}{2-\alpha^k}=\frac{1}{31}(16+8\alpha^k+4\alpha^{2k}+2\alpha^{3k}+\alpha^{4k}).$$

$$\therefore\ (与式)=\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{2-\alpha^k}$$

$$=\frac{1}{31}\{16\times4+8(\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4)+4(\alpha^2+\alpha^4+\alpha^6+\alpha^8)$$

$$+2(\alpha^3+\alpha^6+\alpha^9+\alpha^{12})+(\alpha^4+\alpha^8+\alpha^{12}+\alpha^{16})\}$$

$$=\frac{1}{31}\{64+(8+4+2+1)(\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4)\}=\frac{49}{31}.\ (\because ①,\ ②) \qquad (答)$$

【解答 3】

$$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0$$

の解は，1，α，α^2，α^3，α^4 であるから，

$$x^4+x^3+x^2+x+1=(x-\alpha)(x-\alpha^2)(x-\alpha^3)(x-\alpha^4).$$

これを $f(x)$ とおくと

$$f'(x)=4x^3+3x^2+2x+1$$

$$=(x-\alpha^2)(x-\alpha^3)(x-\alpha^4)+(x-\alpha)(x-\alpha^3)(x-\alpha^4)$$

$$+(x-\alpha)(x-\alpha^2)(x-\alpha^4)+(x-\alpha)(x-\alpha^2)(x-\alpha^3).$$

$$\therefore\ (与式)=\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{2-\alpha^k}=\frac{f'(2)}{f(2)}=\frac{4\cdot2^3+3\cdot2^2+2\cdot2+1}{2^4+2^3+2^2+2+1}=\frac{49}{31}. \qquad (答)$$