はじめに

大学入試数学と，教科書で学ぶ高校数学との間にはかなりのレベル差があるから，合格するためには，そのギャップを埋めるための有効な早期入試対策が必要になります．

中堅以上の大学の入試対策は，ただひたすら多くの問題に挑んで解けばよいというものではありません．また，つまらない問題をいくら解いてみたところで大学入試問題を解くための真の学力向上は望めません．したがって，中堅からやや難関大学入試の頻出重要問題を確実に解く学力を，短期間でいかに効率よく修得するかが，入試突破の鍵になります．

中堅以上の大学入試ともなれば，問題の核心を見抜く洞察力，広い視野から問題にアプローチできる柔軟な発想力，結論を導き出すための正確な論証力と計算力が要求されます．ところが，市販の問題集は入試問題を羅列しただけのものが多く，その解答も，答だけのものや，途中が詳しくないもの，ただ一通りの解答だけのものや，略解程度の別解しかないものが殆どです．そのため，解答を見てもよくわからないとか，自分の解法で行き詰り，その後をどうすればよいのか，など受験生からよく質問を受けます．また，数学Ⅲまで入った理系受験生用のまとまった，やさしめの，わかりやすい問題集を紹介して欲しいとよく頼まれますが，なかなか手頃なものが見当たりません．

そこで，この要望に答えるために，中堅からやや難関大学の入試の合否を左右する頻出重要問題で，柔軟な発想力と数学的センスを磨くための良問 200 題（50 例題 + 150 演習問題）を精選し，問題解法のアプローチの仕方に重点を置き，一般性があって応用範囲の広い解法はできるだけ多く取り入れて作成したのが，この問題集です．

この問題集の 200 題をきちんと学習すれば，優に 500 題に相当する良問を学習したのと同じ学習効果が得られ，中堅からやや難関大学の入試にも十分対応できると確信しています．無味乾燥になりがちな受験勉強に色々な発想の工夫をする楽しみを味わいつつ，数学の真の実力を自然に身につけ，合格の栄冠に輝かれることを期待しています．

三ツ矢和弘

もくじ

第1章　数と式，論証 …… 6
例題 1～4，　演習問題 1～14
第2章　関数と方程式・不等式 …… 16
例題 5～7，　演習問題 15～23
第3章　平面・空間図形 …… 22
例題 8～10，　演習問題 24～33
第4章　図形と方程式 …… 30
例題 11～13，演習問題 34～43
第5章　三角・指数・対数関数 …… 38
例題 14～15，演習問題 44～51
第6章　微分法 …… 44
例題 16～18，演習問題 52～58
第7章　積分法 …… 50
例題 19～23，演習問題 59～68
第8章　数列 …… 60
例題 24～26，演習問題 69～78
第9章　ベクトル …… 68
例題 27～29，演習問題 79～88
第10章　場合の数と確率 …… 76
例題 30～33，演習問題 89～99
第11章　複素数平面 …… 84
例題 34～36，演習問題 100～109
第12章　式と曲線 …… 92
例題 37～38，演習問題 110～117
第13章　関数と数列の極限 …… 100
例題 39～41，演習問題 118～125
第14章　微分法とその応用 …… 110
例題 42～44，演習問題 126～133
第15章　積分法とその応用 …… 118
例題 45～50，演習問題 134～150

本書の特色と学習法

特色

本書は，50 の例題（小問集合を含む）と 150 の演習問題を学習効果を配慮して 15 章に振り分けて構成してあります．

(1) **理系受験生に欠かせない 50 の例題**

50 の例題は，理系受験生必須の重要典型問題を選んであります．必ず全問に目を通し，解法のポイントが定着するまで学習して下さい．なお，例題の下の考え方で，解法の着眼点・道具をワンポイントで示しました．

(2) **計算力・論証力・発想力・数学的センスを磨く 150 の演習問題**

演習問題は，理系受験生として必須の計算力，論証力，発想力を養い，数学的センスを磨くための良問で，頻出・重要問題から厳選した 150 題です．

問題番号の右上の＊印は「やや難」であることを示します．

＊印の問題は，学力がまだ十分でない人が 1 回目の学習をするときは飛ばしても構いませんが，学習が一通り進めば 2 回目には必ず解くようにして下さい．

(3) **良問 200 題の典型的な重要解法による効果的学習**

例題・演習問題の全 200 題に対して，自然なアプローチによる重要かつ応用の効く典型的解法をできるだけ多く採用し，知っていると有利な基本事項の解説や〈出題の背景〉の説明を適宜入れました．また，各自で自学自習できるように，簡潔でわかり易い解答を書くように心掛けました．これらは従来の市販の問題集にはなかったもので，本問題集の最大の特色です。

学習法

(1) 本問題集はある一定レベル以上の比較的内容のある良問を多く取り揃えていますから，問題を解くのにある程度の学力と根気と時間が必要です．初めは，解けない問題が多い人もあると思います．

学力の伸び難い人には

問題が解けないのは基礎学力がないからと思いこみ，すぐ教科書や易しい基本問題集に後戻りを繰り返す傾向があります．それでは中堅レベル以上の大学入試問題を解く学力がなかなか身につきません．問題が解けないのは，実は基礎学力がないからではなく，本問レベルの問題を解く練習不足が主な

原因で，苦しくてもしばらく本問レベルの問題を解く訓練を続けることが大切です．早めに良問に取り組み，つまらない計算ミスや勘違いなど，多くの失敗を繰り返しながらもそのうち次第に要領のよい計算力や本当の応用力が身につくものです．これが学力向上の近道です．

学力の伸びる人は

問題が解けなくても，解答をよく読み問題の本質をきちんと把握し直し，なるほどうまく出来ているなと感動しながらどんどん学習を進められる人で，こういう人は集中して学習すれば，比較的短期間でも本当の実力が身につき，高い学力向上が望めます．

(2) 一応各章は独立していますから，履修済みの分野ならどの章から学習を始めても構いません．学習する際，興味を持続しながら集中して能率よく学ぶことが大切です．

得意分野から学習を始めるか，あるいは得意分野と不得意分野を交互に気分を一新しながら"めりはり"をつけて学習するのも有効な学習方法です．

また，学習する際，完璧主義はよくありません．各章の重要概念が理解でき，7，8割が解けるようになれば解けない問題やわからない箇所が残っていても，取り敢えず次の章に進むようにし，一通りまず15章全体をやりきるように努力して下さい．そうすれば，2回目はかなりのスピードで15章を学習できるようになり，解けない問題も少なくなるはずです．大体，2，3回やれば自信もつき，学力も向上しますから，それを信じて学習して下さい．

(3) できるだけ自分の解答ができてから，**【解答】**を見るように心掛けて下さい．しかし，1題につき30分程度考えてもわからなければ**【解答】**を見て理解すればよいでしょう．中堅以上のやや難関大学の入試問題1題当たりの解答所要時間は大体25分位ですから，30分以上長々と1問に時間を掛けるのは入試に関する限り時間の無駄です．入試は限られた時間内での勝負ですから，問題の核心を突いたアプローチをするように心掛けて下さい．同じ問題でもアプローチの仕方によって難易度や計算量が随分変わります．別解を開拓することで解ける問題の範囲が飛躍的に広がり多大な学習効果が得られます．別解を流し読みし，それを吸収するのも大切な学習法で，それによって，柔軟な発想力や数学的センスが養われます．

なお，本問題集である程度自信がついた人は，是非姉妹編の「**ハイレベル理系数学**」にも挑戦して，さらに上の難関大学を目指して下さい．

（注） 大学入試問題文を変更したり，問題の一部を省略または追加したものがあります．その度合の大きい場合に大学名の後に「改」を付しました．

演習問題

1 整式 $f(x)$ と実数 a があり，条件(i), (ii), (iii) をみたしている．

(i) $f(x)$ を x^2+3x+2 で割ると $5x+7$ 余る．

(ii) $f(x)$ を x^2+4x+3 で割ると $2x+a$ 余る．

(iii) $f(x)$ は(i), (ii) をみたす整式の中で次数が最小である．

このとき，a の値と $f(x)$ を求めよ．

2 $f_n(x)=x^{2n}-x^n+1$ とし，n は自然数とする．

(1) α が方程式 $f_1(x)=0$ の解であるとき，α^3 と $f_5(\alpha)$ の値を求めよ．

(2) n を 6 で割った余りが 5 であるとき，$f_n(x)$ は x^2-x+1 で割り切れることを示せ．（宮崎大）

3 $f(x+1)-f(x)=x(x+1)$，$f(0)=0$ をみたす整式 $f(x)$ を求めよ．

4

$$\frac{12}{11}<\frac{y}{x}<\frac{11}{10}\quad (x,\ y \text{ は自然数})$$

をみたす分数 $\dfrac{y}{x}$ のうち，分母 x が最小のものを求めよ．

5 (1) ユークリッドの互除法を用いて 217 と 68 は互いに素であることを示せ．

(2) $217x+68y=1$ をみたす整数 $x,\ y$ のうちで $|3x+y+30|$ を最小にする $x,\ y$ を求めよ．

6 (1) x が整数のとき，x^4 を 5 で割った余りを求めよ．

(2) 方程式 $x^4-5y^4=2$ をみたす整数の組 $(x,\ y)$ は存在しないことを示せ．（岩手大）

7 自然数 $m,\ n$ に対して，$S=\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}$ とおく．$m,\ n$ が $m\geqq n$ および $S<\dfrac{1}{3}$ をみたしながら変わるとき，S の最大値を求めよ．（和歌山大）

8 n を正の整数とする．

(1) n^2 と $2n+1$ は互いに素であることを示せ．

(2) n^2+2 が $2n+1$ の倍数になるような n を求めよ．（一橋大）

ここで，{　　} 内はともに $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ で割り切れるから，
$f_n(x)$ は x^2-x+1 で割り切れる．　　　　(終)

3 【解答 1】

$f(x)$ を n 次 $(n\geqq 2)$ 式とし，$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ $(a_n\neq 0)$ とおく．

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=a_n\{(x+1)^n-x^n\}+a_{n-1}\{(x+1)^{n-1}-x^{n-1}\}+\cdots\\&=na_nx^{n-1}+\left\{\frac{1}{2}n(n-1)a_n+(n-1)a_{n-1}\right\}x^{n-2}+\cdots\\&=x(x+1)=(\text{右辺}).\end{aligned}$$

左辺と右辺の次数は等しいから，$n-1=2$．　$\therefore\ n=3$．

よって，$f(x)=ax^3+bx^2+cx$ $(a\neq 0)$ ($\because$ $f(0)=0$) とおけるから，与式は

$$a\{(x+1)^3-x^3\}+b\{(x+1)^2-x^2\}+c\{(x+1)-x\}=x(x+1)$$
$$\iff 3ax^2+(3a+2b)x+a+b+c=x^2+x.$$

両辺の係数比較より，$3a=1$，$3a+2b=1$，$a+b+c=0$．

$$\therefore\ a=\frac{1}{3},\ b=0,\ c=-\frac{1}{3}.\qquad \therefore\ f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}x.$$　(答)

($n=3$ 以下の別解)

$$f(x+1)-f(x)=x(x+1).\qquad\cdots①$$

$f(0)=0$ だから

$$\begin{cases}①\text{ で } x=0 \text{ として，} f(1)=0.\\ ①\text{ で } x=-1 \text{ として，} f(-1)=0.\end{cases}\qquad \therefore\ f(-1)=f(0)=f(1)=0.$$

よって，因数定理より，3 次式 $f(x)$ は $x(x-1)(x+1)$ で割り切れるから

$$f(x)=ax(x-1)(x+1).\qquad\cdots②$$

① で $x=1$，② で $x=2$ とすると，$f(2)=2=6a$．

$$\therefore\ a=\frac{1}{3}.\qquad \therefore\ f(x)=\frac{1}{3}(x^3-x).$$　(答)

【解答 2】

① で $x=n$ とすると，$f(n+1)-f(n)=n(n+1)$．$(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$

よって，$n\geqq 2$ のとき，$f(0)=0$ だから

$$f(n)=f(0)+\sum_{k=0}^{n-1}k(k+1)=\frac{1}{3}(n-1)n(n+1).\qquad\cdots③$$

($f(1)=0$ だから，$n=1$ でも成り立つ．)

ここで，$g(x)=f(x)-\frac{1}{3}(x^3-x)$ とおくと，$f(x)$ は整式だから $g(x)$ も整式．

よって，$g(x)$ の次数を N とすると，③ より

$$g(1)=g(2)=\cdots=g(N)=g(N+1)=0.$$

すなわち，N 次式 $g(x)$ が $N+1$ 個の相異なる x の値で $g(x)=0$ だから

$$g(x)=0 \iff f(x)=\frac{1}{3}(x^3-x).$$ (条件をみたし適する)　(答)