数学の力を伸ばしたい皆さんへ

先日，予備校の同僚講師と食事に行きました．数ヶ月先まで予約が入っているという，とても人気のあるお店です．小さな店内はカウンター席のみで，料理の味だけではなく，目の前で調理の様子を見られることも，人気の理由のようです．

調理の様子を見ていたのですが，包丁だけでも何本もあり，料理によって様々な鍋やフライパンを使い分け，鮮やかな手際で料理を仕上げていく様子は，まさに一流の料理人の仕事でした．そして，「数学も料理も同じだね」と同僚と話しながら最高の料理を楽しみました．

「数学も料理も同じ」とはどういうことでしょうか？

料理を作るためには，包丁や鍋といった道具，そしていろいろな調味料が必要です．数学の問題を解くためには，いろいろな公式や定理といった'道具'が必要です．

料理をおいしく作るためには，道具を使いこなす技術が必要です．そして，どういう調味料をどのように使えば最高の味になるかを考えながら料理を仕上げていくのでしょう．もちろん，厳しい修行に耐えて技術を磨くことも必要でしょう．

数学の問題を解くためには，公式や定理を状況に応じて使いこなす技術が必要です．いくつかの解法が存在する場合には，最適な解法を選ぶ力も必要です．また，様々な問題を演習することで実戦力が磨かれ，複雑な設定の問題なども論理的に分析して解くことができるようになります．

数学の力を伸ばしていくコツはもう分かりましたか？

まず，道具を手に入れましょう．公式を覚えたり，それらの典型的な使い方を身につけることです．基本を疎かにしてはいけません．

道具を手に入れたら，道具を使う技術を向上させる段階に進みます．たとえば，「相加相乗平均の大小関係は覚えたが，どのような場面で何に注意して使うのか？」，「面積は定積分で計算できることは分かったが，計算量を減らす工夫はないのか？」といったことです．本書『文系の数学　実戦力向上編』は，この部分に狙いを絞り，入試本番で差のつくテーマ90題を厳選し，詳しく解説しています．

さらに，習得した技術を磨き上げるための演習問題を，巻末に載せてあります．これを演習することで，より自信をもって問題を解くことができるようになるでしょう．

数学は粘り強く勉強することが大切です．安易な暗記を行わず，理解を深めましょう．焦らずにじっくりと取り組んでください．本書をやり終えたとき，皆さんの「問題を解く力」は確実に伸びていることでしょう．

65 平面に下ろした垂線

Oを原点とする空間内に3点A，B，Cがあり，4点O，A，B，Cは同一平面上にはないものとする．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$とおき，点Pは$\overrightarrow{OP}=2\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c}$で定まる点とする．

(1) 四面体PABCの体積をV_1，四面体OABCの体積をV_2とするとき，$V_1:V_2$を求めよ．

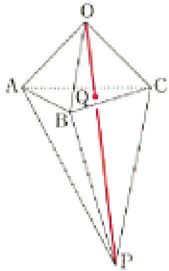
(2) A(1, 2, 0)，B(0, 2, 2)，C(1, 0, 1)とするとき，V_1を求めよ．

（名古屋市立大）

解答

(1) 直線OPと平面ABCの交点をQとおくと，QはOP上にあるから，

$$\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP} \quad \cdots①$$
$$=2k\vec{a}+3k\vec{b}+4k\vec{c} \quad \cdots①'$$



と表せる．Qは平面ABC上の点であるから，①'において，

$$2k+3k+4k=1$$
$$k=\frac{1}{9}$$

☞ Qが平面ABC上にあるとき，$\overrightarrow{OQ}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$と表すと，$\alpha+\beta+\gamma=1$である

よって，①より，

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{9}\overrightarrow{OP}$$

☞ これより，$\overrightarrow{OQ}$は$\overrightarrow{OP}$を$\frac{1}{9}$倍に圧縮したものであることが分かる．よって，OP：OQ＝9：1となり，②が導かれる

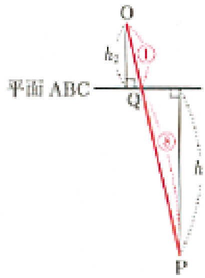
となるから，

$$PQ:OQ=8:1 \quad \cdots②$$

である．これより，Pから平面ABCに下ろした垂線の長さをh_1，Oから平面ABCに下ろした垂線の長さをh_2とすると，②より，

$$h_1:h_2=8:1$$

☞ 右図で，2つの三角形の相似に注目する



となる．したがって，

$$V_1:V_2=\left(\frac{1}{3}\cdot\triangle ABC\cdot h_1\right):\left(\frac{1}{3}\cdot\triangle ABC\cdot h_2\right)$$
$$=h_1:h_2$$
$$=8:1$$

(2) まず，四面体OABCの体積V_2を求める．条件より，

$$\vec{a}=(1,\ 2,\ 0),\quad \vec{b}=(0,\ 2,\ 2),\quad \vec{c}=(1,\ 0,\ 1)$$

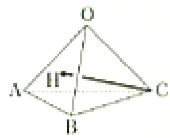
であるから，

$$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+2^2+0}=\sqrt{5},\quad |\vec{b}|=\sqrt{0+2^2+2^2}=2\sqrt{2},\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=0+2\cdot2+0=4$$

これより，

$$\triangle OAB=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{5\cdot8-4^2}=\sqrt{6}$$

また，点Cから平面OABに下ろした垂線の足をHとすると，



$$\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{b} \quad \cdots③$$

Hは平面OAB上の点である

と表せるから，

$$\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OC}=s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c} \quad \cdots④$$

である．$\overrightarrow{CH}\perp$(平面OAB) より，

$$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{OA}=0 \quad かつ \quad \overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{OB}=0$$

$\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{OA}$ かつ $\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{OB}$

であるから，④より，

$$\begin{cases}(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{a}=0\\(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{b}=0\end{cases} \quad \therefore \begin{cases}s|\vec{a}|^2+t\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}=0 & \cdots⑤\\ s\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2-\vec{b}\cdot\vec{c}=0 & \cdots⑥\end{cases}$$

ここで，$\vec{a}\cdot\vec{b}=4$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=1$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=2$ であるから，⑤，⑥より，

$$\begin{cases}5s+4t-1=0\\4s+8t-2=0\end{cases}$$

$\vec{a}=(1,\ 2,\ 0)$，$\vec{b}=(0,\ 2,\ 2)$，$\vec{c}=(1,\ 0,\ 1)$ から，$\vec{a}\cdot\vec{c}=1\cdot1+0+0=1$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=0+0+2\cdot1=2$ と求めている

となり，これを解くと，$s=0$，$t=\dfrac{1}{4}$ となる．よって，④より，

$$\overrightarrow{CH}=\frac{1}{4}\vec{b}-\vec{c}=\frac{1}{4}(0,\ 2,\ 2)-(1,\ 0,\ 1)=\left(-1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$$

となり，

$$|\overrightarrow{CH}|=\sqrt{(-1)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

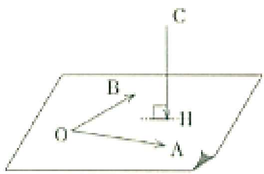
である．したがって，四面体OABCの体積 V_2 は，

$$V_2=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}=1$$

四面体OABCを，底面が△OAB，高さがCHであると考えている

である．ゆえに，(1)の結果より，$V_1=8\times V_2=8$

解説講義



平面に垂線を下ろす問題の基本事項は，次のことである．

$$\overrightarrow{CH}\perp(\text{平面 OAB}) \iff \overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{OA} \quad かつ \quad \overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{OB}$$

これは「平面上の２つのベクトルに垂直なベクトルは，その平面に垂直である」ということである．平面に対して垂直なベクトルを求めるときには，平面上のありとあらゆるベクトルに対して，垂直，垂直，垂直，垂直…などと大量の垂直条件を考える必要はない．２つで十分である！本問のような，平面に垂線を下ろす問題は頻出であるが，点Cから平面OABに下ろした垂線の足がHであるという設定であれば，

(I) Hが平面OAB上の点であること　(II) $\overrightarrow{CH}\perp$(平面OAB)であること

の２点に注目して解くことが標準的である．毎年いくつもの大学で出題されている重要テーマなので，十分な練習をして，本番でも得点できるようにしよう．

文系数学の必勝ポイント

平面に垂直なベクトル

$$\overrightarrow{CH}\perp(\text{平面 OAB}) \iff \overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{OA} \quad かつ \quad \overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{OB}$$

$$\begin{cases}\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{2}{3} & \cdots① \\ \sin\theta\cos\theta=b & \cdots②\end{cases}$$

①を2乗して，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ であることを用いると，

$$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{4}{9}$$

$$\sin\theta\cos\theta=-\frac{5}{18}$$

したがって，②より，

$$\boldsymbol{b=-\frac{5}{18}}$$

(2) $a=2$ のとき，$\sin\theta$，$\cos 2\theta$ が

$$x^2+2x+b=0$$

の2つの解であるから，

$$\begin{cases}\sin\theta+\cos 2\theta=-2 & \cdots③ \\ \sin\theta\cos 2\theta=b & \cdots④\end{cases}$$

③より，

$$\sin\theta+(1-2\sin^2\theta)=-2$$

$$2\sin^2\theta-\sin\theta-3=0$$

$$(2\sin\theta-3)(\sin\theta+1)=0$$

$-1\leqq\sin\theta\leqq 1$ より，

$$\sin\theta=-1$$

このとき，④より，

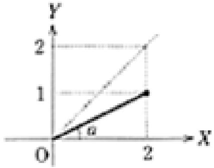
$$\begin{aligned}b&=\sin\theta\cos 2\theta\\&=\sin\theta(1-2\sin^2\theta)\\&=(-1)\{1-2\cdot(-1)^2\}\\&=\boldsymbol{1}\end{aligned}$$

31

$y=\sqrt{5}\sin(\theta+\alpha)$ と合成して考える。

このときの角 α が $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$ であることに注意して，単位円を用いて y のとり得る値の範囲を求める。

28 (2)を見直してみるとよい。



上の図の角 α を用いて，

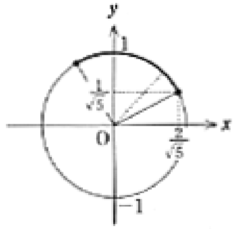
$$y=2\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{5}\sin(\theta+\alpha)$$

と変形できる。ただし，

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}},\quad \cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

であり，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$ である。

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より，$\alpha\leqq\theta+\alpha\leqq\dfrac{\pi}{2}+\alpha$ である。



単位円より，

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\leqq\sin(\theta+\alpha)\leqq 1$$

であるから，

$$1\leqq\sqrt{5}\sin(\theta+\alpha)\leqq\sqrt{5}$$

となる。したがって，

最大値 $\sqrt{5}$，最小値 1

32

$\cos 4\theta$ と $\sin^2\theta$ は，どちらも $\cos 2\theta$ で表せることに気がつきたい。$f(\theta)$ を $\cos 2\theta$ のみで表すことができたら，$\cos 2\theta=t$ とおいて，その t の関数を分析すればよい。

2倍角の公式から，

$$\cos 4\theta=2\cos^2 2\theta-1$$

さらに，$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$ より，

$$\sin^2\theta=\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$$

これらを用いると，

$$\begin{aligned}f(\theta)&=2\cos^2 2\theta-1-4\cdot\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\\&=2\cos^2 2\theta-1-2(1-\cos 2\theta)\\&=2\cos^2 2\theta+2\cos 2\theta-3\end{aligned}$$

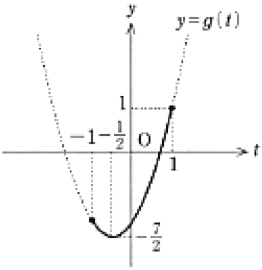
ここで，$\cos 2\theta=t$ とおくと，

$$\begin{aligned}f(\theta)&=2t^2+2t-3\\&=2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{7}{2}\ (=g(t)\ とする)\end{aligned}$$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より，$0\leqq 2\theta\leqq\pi$ であり，

$$-1\leqq\cos 2\theta\leqq 1$$

となるので，$-1 \leqq t \leqq 1$ である．



$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における $f(\theta)$ の最大値，最小値は，$-1 \leqq t \leqq 1$ における $g(t)$ の最大値，最小値を求めればよいから，グラフより，

最大値 1，最小値 $-\dfrac{7}{2}$

33

(2)は $f(x)$ を t の式で表して考える．
$t=\sin x+\cos x$ とすると，

$$f(x)=-\frac{1}{2}t^2+at+\frac{1}{2}$$
$$=-\frac{1}{2}(t-a)^2+\frac{a^2+1}{2}$$

と表される．軸は $t=a$ であるが，これが(1)で求めた範囲に含まれる場合と含まれない場合に分けて考える．

(1)　$t=\sin x+\cos x$ より，

$$t=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

であり，x が実数全体を動くとき，

$$-1 \leqq \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \leqq 1$$

であるから，

$$-\sqrt{2} \leqq \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \leqq \sqrt{2}$$

よって，

$$\boldsymbol{-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}}$$

(2)　$t=\sin x+\cos x$ を 2 乗すると，

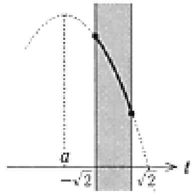
$$t^2=1+2\sin x\cos x$$
$$\sin x\cos x=\frac{1}{2}(t^2-1)$$

これを用いると，

$$f(x)=at-\frac{1}{2}(t^2-1)$$
$$=-\frac{1}{2}t^2+at+\frac{1}{2}$$
$$=-\frac{1}{2}(t-a)^2+\frac{a^2+1}{2}$$

ここで，$g(t)=-\dfrac{1}{2}(t-a)^2+\dfrac{a^2+1}{2}$ とすると，$f(x)$ の最大値が 3 となるのは，$-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}$ における $g(t)$ の最大値が 3 となるときである．$y=g(t)$ のグラフの軸は $t=a$ であり，軸の位置に注目し，場合分けをして考える．

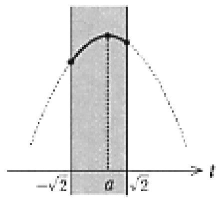
(ア)　$a<-\sqrt{2}$ のとき



$g(-\sqrt{2})=3$ より，

$$-\sqrt{2}a-\frac{1}{2}=3$$
$$a=-\frac{7\sqrt{2}}{4}$$

(イ)　$-\sqrt{2} \leqq a \leqq \sqrt{2}$ のとき

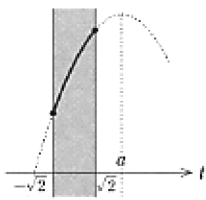


頂点に注目し，$\dfrac{a^2+1}{2}=3$ より，

$$a^2=5$$

これより $a=\pm\sqrt{5}$ となるが，これは $-\sqrt{2} \leqq a \leqq \sqrt{2}$ を満たさない．

(ウ)　$\sqrt{2}<a$ のとき



$g(\sqrt{2})=3$ より，