勉強を始める皆さんへ

予備校で授業をしていると，文系の受験生から，

「文系って数学はどれくらいやればいいのですか？」

「英語は大丈夫だけど数学が苦手で困っています」

「数学は何から手をつけてよいのか分からないのですが…」

という相談を毎日のように受けます．

皆さんも同じことを相談したいと思っているかも知れませんね．しかし，もう大丈夫です．この本がその悩みを解消してくれます．

この本は，

文系で数学を必要とする受験生が最初にやるべき１冊

になっています．もう少し詳しく言うと，この本で勉強すれば，

- 文系で数学を必要とするすべての受験生がマスターしなければならない基本事項を整理できる
- 文系の数学入試で数多く見られる典型的な問題，すなわち，落とせない問題を中心に配置しているので，標準レベルの問題に対応できる数学力が確実に身につく

ということです．出題の少ない特殊な問題や難問は一切入っていませんので，この本をやり遂げた段階で，**文系の数学入試に向けての基本が固まり，落としてはいけない問題を確実にとっていく力がつきます．**

この本で扱っている問題が理解できて定着していれば，その段階で，標準程度の数学力はついていると思ってよいでしょう．そして，この本でガッチリと基礎を固めたら，難関大学の発展的な問題や融合問題に挑戦していくこともできるでしょう．

なお，この本は文系で数学を必要とする受験生に向けてのものですが，理系で基礎力に自信のない人にもおすすめします．この本で基本を作り上げてから，その次のレベルにステップアップしていけばよいでしょう．

それでは，次のページから，この本で勉強していくときの注意点を書いておきます．

この本の効果的な使い方
（力をより伸ばすために必ず読んでください）

まず，この本の構成を紹介しておきます．１つのテーマに対して，

問題文／解答／解説講義／文系数学の必勝ポイント

の順に書かれていて，巻末には120題の演習問題が用意されています．

１つのテーマ，問題に対して，次の３Stepで取り組みましょう．

■First Step：「問題」を解いてみる

・公式などの基本事項が曖昧であれば，問題を解く前に教科書の該当部分を読み直し，ある程度の内容を確認してから解いてみましょう．
・文系の私立大学では穴埋め形式やマーク形式の入試も目立ちますが，この本では，内容はそのままで，穴埋めでない形式に問題文の表現を変更しています．また，理系の大学の問題であっても，標準的で文系の数学の勉強にふさわしい問題は入れてあります．
・本番の入試が穴埋め形式であっても，普段の勉強のときには途中のプロセスを書いた方が考え方を習得しやすくなります．計算式を列挙するような解答ではなく，日本語を入れた解答を作ってみましょう．
・すぐに解答を見るのではなく，必ず"考える"ということをしてください．その上で「自分はどこでつまってしまったのか？　何が分かっていなかったのか？」を明確にしておくことが大切です．

■Second Step：「解答」を確認して，「解説講義」を読む

・自分の答案の流れと，「解答」を比べて正しく解けているかを確認します．
・最終的な答え（数値など）が合っているからといって，「解答」を読まないという勉強はしてはいけません．仮に正解していても，「解答」を読んで確認することに意味があるのです．
・さらに，「解説講義」は必ず読んでください！　単なる解答の補足ではなく，そのテーマの本質的な説明，陥りやすいミス，注意してほしいことなどが，紙面の許す限り書き込まれています．長いところもありますが，飛ばさずにしっかりと読んでください．

■Third Step：その問題の重要事項を「文系数学の必勝ポイント」でまとめる

- 「文系数学の必勝ポイント」では，そのテーマ，問題を通して習得すべき重要事項を簡潔にまとめています．この“まとめ”の作業をすることで，似た問題が次に出されたときに正解できるようになっていくわけです．
- 「文系数学の必勝ポイント」を確認したら，一旦，そのテーマは終了です．問題の右上部分にチェックボックス（2つ並んだ正方形のこと）があるので，大丈夫なら◎，もう一度やった方がよければ△，などのように印をつけておいて自分の理解度が分かるようにしておきましょう．そして，理解不十分な問題は何度かやり直しをして，入試までにできるようにしていきましょう．

以上の3Stepで勉強を進めていき，区切りのよいところで，巻末の演習問題に挑戦してみましょう．演習問題はやや手応えのある問題も少しずつ入っていますが，詳細な別冊解答が準備されています．120題というボリュームですが，これをやり遂げることは入試に向けての大きな自信となっていくでしょう．

文系の人にとって数学は楽しくない科目かもしれません．しかし，第1志望の大学に行くためには数学を避けては通れない人もいるでしょう．文系の人に「数学を好きになってください」とは言いませんが，数学が原因で夢をあきらめるような寂しいことにはなってほしくありません．数学はコツコツとがんばって勉強していけば，次第に力が伸びていく科目です．粘り強い努力を積み重ね，その手で「合格」を勝ち取ってください．この本が君の努力を合格につなげてくれるでしょう．さあ，早速はじめましょう！

12 軸が動く2次関数の最大最小

a を実数の定数とする．x の2次関数 $y=x^2-2ax+a+1\ (-1\leqq x\leqq 1)$ について，

(1)　この2次関数の最小値 m を，a を用いて表せ．また，m の最大値を求めよ．

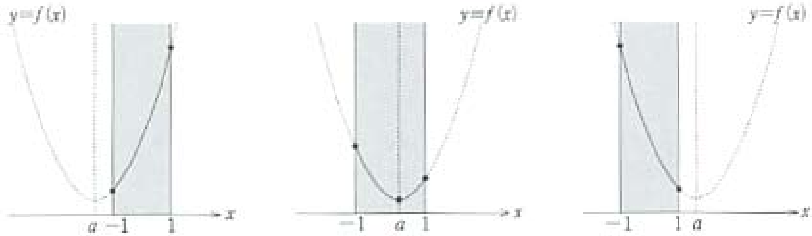
(2)　この2次関数の最大値 M を，a を用いて表せ．　　（奈良大）

解答

$f(x)=x^2-2ax+a+1$ とすると，$f(x)=(x-a)^2-a^2+a+1$ となるので，$y=f(x)$ のグラフは，軸が $x=a$ で下に凸の放物線である．

軸 $x=a$ と定義域 $-1\leqq x\leqq 1$ の位置関係に注目して場合分けをして考える．

(1)　軸が $-1\leqq x\leqq 1$ の範囲に含まれる場合と含まれない場合によって，次の3つの場合がある．



(ア) $a<-1$　　(イ) $-1\leqq a\leqq 1$　　(ウ) $1<a$

(ア) $a<-1$ のとき，区間の左端で最小になり，$m=f(-1)=3a+2$

(イ) $-1\leqq a\leqq 1$ のとき，頂点で最小になり，$m=f(a)=-a^2+a+1$

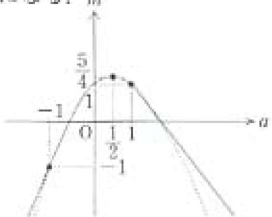
(ウ) $1<a$ のとき，区間の右端で最小になり，$m=f(1)=-a+2$

以上より，

$$m=\begin{cases} 3a+2 & (a<-1\text{ のとき}) \\ -a^2+a+1 & (-1\leqq a\leqq 1\text{ のとき}) \\ -a+2 & (1<a\text{ のとき}) \end{cases}$$

※ 場合分けは，
$a\leqq -1$，$-1<a<1$，$1\leqq a$
$a\leqq -1$，$-1\leqq a\leqq 1$，$1\leqq a$
などでもよい

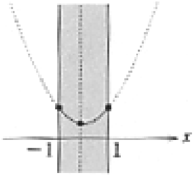
さらに，m は a の関数になっているから，横軸を a 軸として m のグラフを描くと次のようになる．



※ $a<-1$ では
　直線 $m=3a+2$，
$-1\leqq a\leqq 1$ では
　放物線 $m=-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$，
$1<a$ では
　直線 $m=-a+2$
を描けばよい

グラフより，a が変化するとき，m の最大値は $\frac{5}{4}$

(イ) $-1 \leqq \dfrac{2a-3}{2} \leqq 1$，すなわち $\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq \dfrac{5}{2}$ のとき



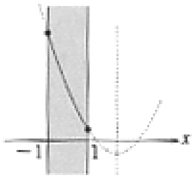
$-1 \leqq x \leqq 1$ における最小値は頂点の $\dfrac{-4a^2+20a-9}{4}$ であり，つねに $f(x) \geqq 0$ となる条件は，

$$\frac{-4a^2+20a-9}{4} \geqq 0$$
$$4a^2-20a+9 \leqq 0$$
$$(2a-1)(2a-9) \leqq 0$$
$$\frac{1}{2} \leqq a \leqq \frac{9}{2}$$

$\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq \dfrac{5}{2}$ も考えて，

$$\frac{1}{2} \leqq a \leqq \frac{5}{2}$$

(ウ) $1 < \dfrac{2a-3}{2}$，すなわち $\dfrac{5}{2} < a$ のとき



$-1 \leqq x \leqq 1$ における最小値は $f(1)=4$ である．したがって，$\dfrac{5}{2} < a$ の場合は，$-1 \leqq x \leqq 1$ においてつねに $f(x) \geqq 0$ が成り立っている．

(ア)，(イ)，(ウ)より，求める a の値の範囲は，

$$\boldsymbol{\frac{1}{2} \leqq a}$$

＜補足＞

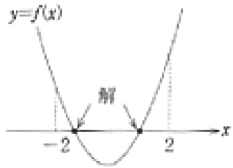
(ウ)の場合の最小値は 4 なので，$f(x)<0$ になってしまうことはない（4 より小さい値はとらない）．したがって，$\dfrac{5}{2} < a$ の場合は，つねに題意は満たされることになる．

14

解の配置問題である．$-2<x<2$ の範囲で x 軸と 2 点で交わるようなグラフになればよく，そのための条件を，頂点や範囲の端の値に注目して考える．

$f(x)=x^2-2ax+a$ とすると，

$$f(x)=(x-a)^2-a^2+a$$



$y=f(x)$ のグラフが上のようになればよいから，

$$\begin{cases} -a^2+a<0 & \cdots① \\ -2<a<2 & \cdots② \\ f(-2)=4+5a>0 & \cdots③ \\ f(2)=4-3a>0 & \cdots④ \end{cases}$$

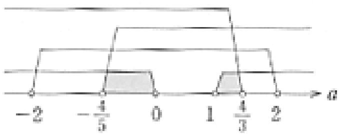
①より，$a(a-1)>0$ となるので，

$$a<0,\ 1<a$$

③より，$a>-\dfrac{4}{5}$ である．

④より，$a<\dfrac{4}{3}$ である．

したがって，①，②，③，④を同時に満たす a の範囲を求めて，



$$\boldsymbol{-\frac{4}{5}<a<0,\ 1<a<\frac{4}{3}}$$

＜補足＞

①は，頂点の y 座標が負であることに注目したが，判別式に注目して，

$$\frac{D}{4}=a^2-a>0$$

としてもよい．