2027
共通テスト
直前対策問題集

第 2 回

第2回

数学Ⅱ，数学B，数学C

100点／70分

（注）この科目には，選択問題があります。

第１問 （必答問題） （配点　15）

複素数 x，y の連立方程式

$$(*)\quad \begin{cases} x+y+xy=3 \\ x^2+y^2=a \end{cases}$$

について考える。ただし，a は複素数の定数である。

(1)　i を虚数単位とする。$x=i$ が $(*)$ を満たすとき

$$y=\boxed{\text{ア}},\qquad a=\boxed{\text{イ}}$$

である。

$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪　$1+2i$	①　$2+i$	②　$2+4i$	③　$4+4i$
④　$1-2i$	⑤　$2-i$	⑥　$-2-4i$	⑦　$-4-4i$

（数学Ⅱ，数学B，数学C 第１問 は次ページに続く。）

(2)　(*)を満たす x，y に対して

$$(**)\quad \begin{cases} u = x + y \\ v = xy \end{cases}$$

とおく。$v = 3 - u$ が成り立つので，u は2次方程式

$$u^2 + \boxed{\text{ウ}}\,u + \boxed{\text{エ}} = 0$$

を満たす。

(i)　$a = 9$ とすると $u = \boxed{\text{オ}}$，$\boxed{\text{カキ}}$ となる。

$u = \boxed{\text{オ}}$ のとき

$$(x,\ y) = \left(\boxed{\text{ク}},\ \boxed{\text{ケ}}\right),\ \left(\boxed{\text{コ}},\ \boxed{\text{サ}}\right)$$

となる。ただし，二つの組 $\left(\boxed{\text{ク}},\ \boxed{\text{ケ}}\right)$ と $\left(\boxed{\text{コ}},\ \boxed{\text{サ}}\right)$ の解答の順序は問わない。

また，$u = \boxed{\text{カキ}}$ のとき，x と y を二つの解にもつ2次方程式の一つは

$$X^2 + \boxed{\text{シ}}\,X + \boxed{\text{ス}} = 0$$

である。

(ii)　実数 u，v に対して(**)を満たす x と y がともに実数となる条件は

$$u^2 - \boxed{\text{セ}}\,v \geqq 0$$

が成り立つことである。したがって，a が実数であるとき，連立方程式(*)を満たす実数の組 $(x,\ y)$ が少なくとも1組存在するような a の値の範囲は

$$a \geqq \boxed{\text{ソ}}$$

である。

$\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ a	① 1	② 2	③ $(a+2)$	④ $(-a-2)$
⑤ $(a+3)$	⑥ $(-a-3)$	⑦ $(a+6)$	⑧ $(-a-6)$	⑨ $(-a)$

第２問 （必答問題） （配点　15）

次の**問題**について考えよう。

> **問題**　座標平面上で不等式
> $$\log_2(y-x^2) < 1 + \log_2 x + \log_2(3-x) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$
> の表す領域を D とする。D を図示せよ。

$1+\log_2 x+\log_2(3-x)$ を変形すると $\log_2\left(\boxed{\text{ア}}\,x-\boxed{\text{イ}}\,x^2\right)$ となる。

領域 D は

(i)　不等式 $0<x<3$ の表す領域

(ii)　図 $\boxed{\text{ウ}}$ の灰色部分の表す領域

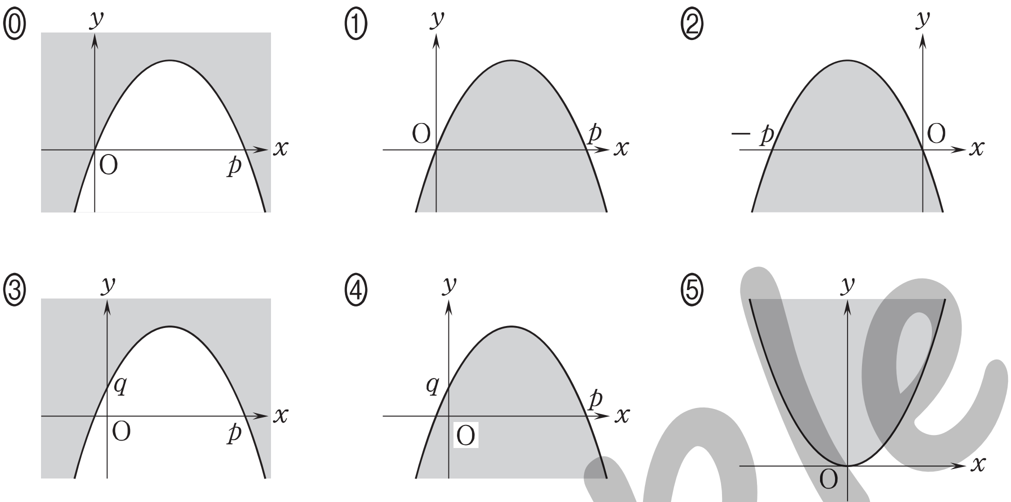
(iii)　図 $\boxed{\text{エ}}$ の灰色部分の表す領域

とすると，(i)，(ii)，(iii) の三つの領域の共通部分である。

この共通部分にその境界線(放物線など)を追加した図形の面積を求めると $\boxed{\text{オ}}$ である。

（数学Ⅱ，数学Ｂ，数学Ｃ 第２問 は次ページに続く。）

ただし，$\boxed{\text{ウ}}$ と $\boxed{\text{エ}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪ ～ ⑤ のうちから一つずつ選べ。$\boxed{\text{ウ}}$ と $\boxed{\text{エ}}$ の解答の順序は問わない。



いずれの図においても境界線(放物線)上は含まないものとし，p，q は適当な正の定数であるとする。

第 3 問 （必答問題）（配点　22）

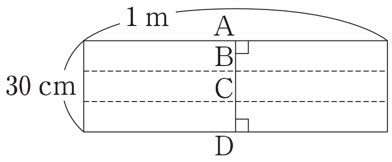


図 1

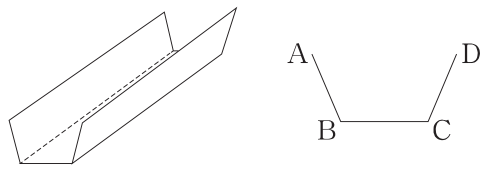
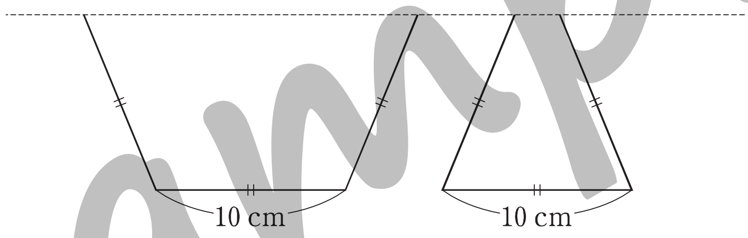


図 2

長さ 1 m，幅 30 cm の長方形の板に 10 cm 間隔で折り目(**図 1** の点線)がついている。この折り目に添って板を曲げて**図 2** のような断面が台形の雨樋(あまどい)を作りたい。

太郎：できるだけ処理できる水量を多くしたいね。

花子：体積を考えてもよいけれど，雨樋の断面の台形 ABCD の面積が大きければ処理できる水量も多くなるね。



太郎：雨樋の断面の台形は高さが同じなら上側が広がった方が面積が大きくなるね。

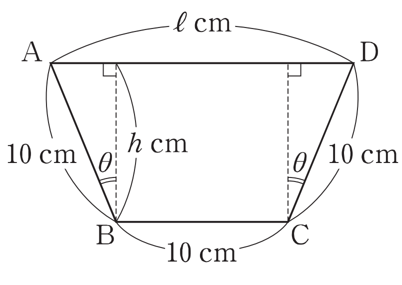


図 3

（数学Ⅱ，数学B，数学C 第 3 問 は次ページに続く。）

そこで，**図3**のように θ $\left(0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ を定め，台形ABCDの面積を S とする。

(1)　$\tan\theta = \dfrac{1}{2}$ のとき $S = \boxed{\text{アイ}} + \boxed{\text{ウエ}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$ である。

(2)　S が最大となるときの θ の条件を求めることにした。

台形の高さ h は　$h = \boxed{\text{カ}}$ cm，上底の長さ ℓ は　$\ell = \left(10 + 2\cdot\boxed{\text{キ}}\right)$ cm である。

$\boxed{\text{カ}}$，$\boxed{\text{キ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ $10\cos\theta$	① $10\sin\theta$	② $10\tan\theta$
③ $\dfrac{10}{\cos\theta}$	④ $\dfrac{10}{\sin\theta}$	⑤ $\dfrac{10}{\tan\theta}$

（**数学Ⅱ，数学B，数学C 第3問** は次ページに続く。）

8

台形の面積 S は　$S=\dfrac{1}{2}(10+\ell)h\,\mathrm{cm}^2$ である。$\sin\theta=x$ とおき，S^2 を x を用いて表すと

$$S^2=10^4\left(\boxed{\text{ク}}\,x^4-\boxed{\text{ケ}}\,x^3+\boxed{\text{コ}}\,x+\boxed{\text{サ}}\right)$$

となる。

$$f(x)=\boxed{\text{ク}}\,x^4-\boxed{\text{ケ}}\,x^3+\boxed{\text{コ}}\,x+\boxed{\text{サ}}$$

とする。$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，x のとり得る値の範囲は $\boxed{\text{シ}}\leqq x<\boxed{\text{ス}}$ である。また，

$$f'(x)=\boxed{\text{セソ}}\left(x+\boxed{\text{タ}}\right)^2\left(x-\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}\right)$$

であるから $f(x)$ は $x=\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ で最大となることがわかる。

したがって，$\theta=\dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}\pi$ とすると S は最大となる。

（下 書 き 用 紙）

数学Ⅱ，数学Ｂ，数学Ｃの試験問題は次に続く。

第4問～第7問は，**いずれか3問を選択**し，解答しなさい。

第4問 （選択問題） （配点　16）

(1)　数列 $\{a_n\}$ は等差数列で，$a_2=5$，$a_5=11$ である。

数列 $\{a_n\}$ の初項は $\boxed{\text{ア}}$ で，公差は $\boxed{\text{イ}}$ であり，$\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=\boxed{\text{ウ}}\,n+\boxed{\text{エ}}$$

である。自然数 n に対して $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ とおくと

$$S_n=n^{\boxed{\text{オ}}}+\boxed{\text{カ}}\,n$$

である。

(2)　数列 $\{b_n\}$ は一般項が $b_n=pn^2+qn+r$ という n の2次式で表され，(1)で定めた数列 $\{S_n\}$ に対して

$$b_{n+1}=3b_n-S_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を満たすとする。このとき

$$p=\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}},\qquad q=\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}},\qquad r=\boxed{\text{サ}}$$

である。したがって数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$$b_n=\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}n^2+\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}n+\boxed{\text{サ}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

である。

（数学Ⅱ，数学B，数学C 第4問 は次ページに続く。）

(3)　数列 $\{S_n\}$，$\{b_n\}$ はそれぞれ (1)，(2) で定めたものとする。

自然数 n に対して $T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{S_k}{b_kb_{k+1}}$ とする。T_n を求めよう。

① により $S_k=3b_k-b_{k+1}$ となるので

$$\frac{S_k}{b_kb_{k+1}}=\frac{3}{b_{k+1}}-\frac{1}{b_k}$$

が成り立つ。したがって

$$\frac{S_k}{b_kb_{k+1}}=\boxed{シ}\left(\frac{1}{b_{k+1}}-\frac{1}{b_k}\right)+\frac{\boxed{ス}}{b_k}$$

$$=\boxed{シ}\left(\frac{1}{b_{k+1}}-\frac{1}{b_k}\right)+\boxed{セ}\left(\frac{1}{k+\boxed{ソ}}-\frac{1}{k+\boxed{タ}}\right)$$

となって

$$T_n=\frac{n\left(n+\boxed{チ}\right)}{\left(n+\boxed{ツ}\right)\left(n+\boxed{テ}\right)}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

となる。ただし，$\boxed{ツ}<\boxed{テ}$ とする。

第4問～第7問は，**いずれか3問を選択**し，解答しなさい。

第5問 （選択問題） （配点　16）

以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて15ページの正規分布表を用いてもよい。

(1) 袋の中に5個の玉が入っており，そのうち2個はダイヤモンドであり，残り3個はガラスでできている。

この袋から1個の玉を取り出し，それがダイヤモンドであるかガラスであるかを調べて袋に戻すことを n 回繰り返す。k 回目の取り出しにおいて

$$\begin{cases} \text{取り出した玉がダイヤモンドであれば} & X_k = 1 \\ \text{取り出した玉がガラスであれば} & X_k = 0 \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

とする。ただし $k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$ である。さらに

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n$$

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n}{n} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

とする。

(i) $n=5$ のとき，X の平均 $E(X)$ と X の分散 $V(X)$ は

$$E(X) = \boxed{\text{ア}},\qquad V(X) = \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$

である。

（数学Ⅱ，数学B，数学C 第5問 は次ページに続く。）

(ii) $n=600$ とする。$\overline{X}$ の平均 $E(\overline{X})$ と $\overline{X}$ の標準偏差 $\sigma(\overline{X})$ は

$$E(\overline{X})=\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}},\qquad \sigma(\overline{X})=\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キク}}}$$

となる。

玉を取り出す回数600は十分に大きい値であるので，$\overline{X}$ は近似的に正規分布に従うと考えてよい。すると

$$Z=\boxed{\text{ケコ}}\,\overline{X}-\boxed{\text{サシ}}$$

により定まる Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。ただし，$\boxed{\text{ケコ}}>0$ とする。

したがって，$\dfrac{19}{50}\leqq\overline{X}\leqq\dfrac{21}{50}$ が成り立つ確率は $0.\boxed{\text{スセソ}}$ となる。

(**数学Ⅱ，数学B，数学C 第5問 は次ページに続く。**)

(2)　袋の中にダイヤモンドでできた玉が何個かとガラスでできた玉が何個かが混ざって入っている。袋の中の玉のうち，ダイヤモンドの玉の割合を p（$0<p<1$）とする。この p の値を推定することを考えよう。

　この袋から1個の玉を取り出し，それがダイヤモンドであるかガラスであるかを調べて袋に戻すことを n 回繰り返す。k 回目の取り出しに関して X_k を12ページの ① により定め，それらを用いて $\overline{X}$ を ② により定める。

　n が大きいと $\overline{X}$ は近似的に正規分布に従うとしてよく，すると

$$q = \boxed{タ}.\boxed{チツ}$$

を次の $\boxed{テ}$ に代入した不等式の成り立つ確率が0.95と考えられる。それを用いて p に対する信頼度95％の信頼区間を導くことができる。

$\boxed{テ}$ の解答群

⓪ $-q \leqq \dfrac{\overline{X}-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqq q$　　① $-q \leqq \dfrac{\overline{X}-p}{\sqrt{p(1-p)}} \leqq q$

② $-q \leqq \dfrac{\overline{X}-p}{\sqrt{\dfrac{\overline{X}\left(1-\overline{X}\right)}{n}}} \leqq q$　　③ $-q \leqq \dfrac{\overline{X}-np}{\sqrt{\overline{X}\left(1-\overline{X}\right)}} \leqq q$

(3)　(2)において $n=300$，$\overline{X}=\dfrac{1}{4}$ のとき，p に対する信頼度95％の信頼区間は

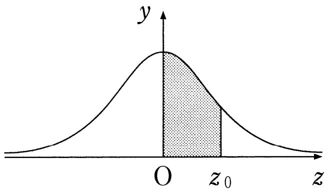
$$0.\boxed{トナニ} \leqq p \leqq 0.\boxed{ヌネノ}$$

となる。

（数学Ⅱ，数学B，数学C 第5問 は次ページに続く。）

正 規 分 布 表

次の表は，標準正規分布の分布曲線における右図の灰色部分の面積の値をまとめたものである。



z_0	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.5	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998

第４問～第７問は，**いずれか３問を選択**し，解答しなさい。

第６問 （選択問題）（配点　16）

一辺の長さが１である正四面体 OABC において，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくと

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1,\qquad \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$$

である。また

$$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\boxed{\text{ウ}}$$

$$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\boxed{\text{エ}}$$

$$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$$

である。

(1) 点 O を通り $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ に平行な直線と平面 ABC の交点を P とする。

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

であり，正四面体 OABC の体積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケコ}}}$ である。

(2) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ のなす角を θ とすると

$$\cos\theta=\frac{\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}}$$

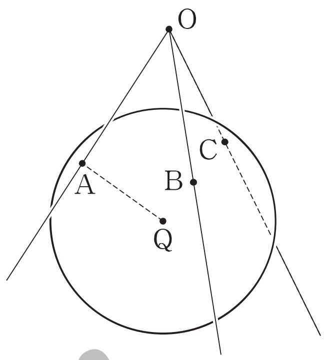
である。

（数学Ⅱ，数学B，数学C 第６問 は次ページに続く。）

(3) 次の**問題**について太郎さんと花子さんは話している。

問題 空間に点 Q を中心とする球面 S があり，S は直線 OA，OB，OC とそれぞれ点 A，点 B，点 C において接している。

正四面体 OABC と四面体 QABC の体積の和を求めよ。



太郎：$\angle\mathrm{QOA}=\angle\mathrm{QOB}=\angle\mathrm{QOC}$ だから $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\ell\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$ （ℓ は実数）とおけるよ。

$\angle\mathrm{OAQ}$ が直角だから ℓ の値が決まりそうだ。

花子：(2) から直角三角形 OAQ の辺の長さの比がわかるけど，利用できないかな。

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$$

となり，正四面体 OABC と四面体 QABC の体積の和は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である。

第4問～第7問は，いずれか3問を選択し，解答しなさい。

第7問 （選択問題）（配点　16）

p は実数の定数とし，3次方程式

$$z^3-(p+2)z^2+(2p+1)z-2=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

は虚数の解と実数の解をもつとする。

(1) ① の左辺は z についての3次式，p についての1次式とみることができる。そこで，① の左辺を p に注目して整理すると

$$p(-z^2+2z)+z^3-2z^2+z-2$$

となる。したがって，3次方程式 ① は

$$\begin{cases} z=\boxed{\text{ア}} \\ \text{または} \\ z^2-\boxed{\boxed{\text{イ}}}z+\boxed{\text{ウ}}=0 \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

に同じである。2次方程式 ② が虚数解をもつことから，p のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\text{エオ}}<p<\boxed{\text{カ}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

となる。

3次方程式 ① の三つの解を α，$\overline{\alpha}$，$\boxed{\text{ア}}$ と表すことができる。このとき，

$$\alpha+\overline{\alpha}=\boxed{\boxed{\text{キ}}}, \qquad \alpha\overline{\alpha}=\boxed{\boxed{\text{ク}}}$$

である。

$\boxed{\boxed{\text{イ}}}$，$\boxed{\boxed{\text{キ}}}$，$\boxed{\boxed{\text{ク}}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ p	① 1	② 2	③ $p+1$	④ $p+2$

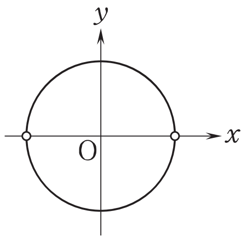
(数学Ⅱ，数学B，数学C 第7問 は次ページに続く。)

(2)　p が ③ を満たして変化するとする。

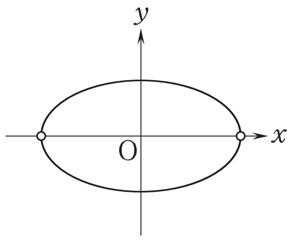
複素数平面上で 2 点 α，$\overline{\alpha}$ の描く図形は $\boxed{\text{ケ}}$ である。

$\boxed{\text{ケ}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。

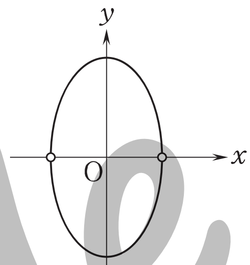
⓪



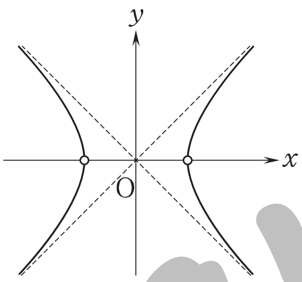
①



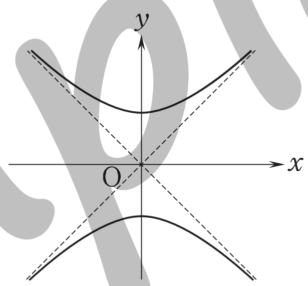
②



③



④



(3)　また，p が ③ を満たして変化するとき，3 次方程式 ① の三つの解を頂点にもつ三角形の周と内部が通過してできる領域の面積は

$$\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\pi+\sqrt{\boxed{\text{シ}}}$$

である。

MEMO

2027
共通テスト
直前対策問題集

第２回

数学Ⅱ，数学B，数学C

第２回 数学Ⅱ，数学B，数学C チェックシート・第１面

1

解答記号	解答	配点
ア	4	2
イ	7	1
ウ	2	2
エ	8	
オ	3	
カ	−	2
キ	5	
ク	0 (または 3)	1
ケ	3 (または 0)	
コ	3 (または 0)	
サ	0 (または 3)	
シ	5	1
ス	8	
セ	4	2
ソ	2	4
タ		
チ		
ツ		
テ		
ト		
ナ		
ニ		
ヌ		
ネ		
ノ		
ハ		
ヒ		
フ		
ヘ		
ホ		

(正解は２通り)

2

解答記号	解答	配点
ア	6	4
イ	2	
ウ	1, 5	8
エ	1, 5	
オ	9	3
カ		
キ		
ク		
ケ		
コ		
サ		
シ		
ス		
セ		
ソ		
タ		
チ		
ツ		
テ		
ト		
ナ		
ニ		
ヌ		
ネ		
ノ		
ハ		
ヒ		
フ		
ヘ		
ホ		

(順不同)

3

解答記号	解答	配点
ア	4	3
イ	0	
ウ	4	
エ	0	
オ	5	
カ	0	2
キ	1	3
ク	−	4
ケ	2	
コ	2	
サ	1	
シ	0	1
ス	1	
セ	−	4
ソ	4	
タ	1	
チ	1	
ツ	2	
テ	1	5
ト	6	
ナ		
ニ		
ヌ		
ネ		
ノ		
ハ		
ヒ		
フ		
ヘ		
ホ		

第2回 数学Ⅱ，数学B，数学C　チェックシート・第2面

4

解答記号	解答	配点
ア	3	1
イ	2	1
ウ	2	3
エ	1	
オ	2	3
カ	2	
キ	1	3
ク	2	
ケ	3	
コ	2	
サ	1	
シ	3	1
ス	2	
セ	4	1
ソ	1	
タ	2	3
チ	1	
ツ	2	
テ	3	
ト		
ナ		
ニ		
ヌ		
ネ		
ノ		
ハ		
ヒ		
フ		
ヘ		
ホ		

5

解答記号	解答	配点
ア	2	1
イ	6	1
ウ	5	
エ	2	2
オ	5	
カ	1	2
キ	5	
ク	0	
ケ	5	2
コ	0	
サ	2	
シ	0	
ス	6	2
セ	8	
ソ	3	
タ	1	1
チ	9	
ツ	6	
テ	2	2
ト	2	3
ナ	0	
ニ	1	
ヌ	2	
ネ	9	
ノ	9	
ハ		
ヒ		
フ		
ヘ		
ホ		

6

解答記号	解答	配点
ア	1	1
イ	2	
ウ	0	1
エ	0	
オ	6	2
カ	1	2
キ	3	
ク	2	2
ケ	1	
コ	2	
サ	6	2
シ	3	
ス	1	2
セ	2	
ソ	2	4
タ	8	
チ		
ツ		
テ		
ト		
ナ		
ニ		
ヌ		
ネ		
ノ		
ハ		
ヒ		
フ		
ヘ		
ホ		

7

解答記号	解答	配点
ア	2	1
イ	0	2
ウ	1	
エ	−	2
オ	2	
カ	2	
キ	0	2
ク	1	2
ケ	0	3
コ	2	4
サ	3	
シ	3	
ス		
セ		
ソ		
タ		
チ		
ツ		
テ		
ト		
ナ		
ニ		
ヌ		
ネ		
ノ		
ハ		
ヒ		
フ		
ヘ		
ホ		

【解答・採点基準】　（70分　100点満点）

問題番号(配点)	解答記号	正　解	配点	自己採点
第１問 (15)	ア	④	2	
	イ	⑦	1	
	ウ，エ	②，⑧	2	
	$u=$ オ，カキ	$u=3$，-5	2	
	(ク，ケ)，(コ，サ)	(0, 3)，(3, 0) または (3, 0)，(0, 3)	1	
	X^2+ シ $X+$ ス	X^2+5X+8	1	
	u^2- セ v	u^2-4v	2	
	$a \geqq$ ソ	$a \geqq 2$	4	
		第１問　自己採点小計		
第２問 (15)	ア $x-$ イ x^2	$6x-2x^2$	4	
	ウ，エ	①，⑤ （解答の順序は問わない）	8	
	オ	9	3	
		第２問　自己採点小計		
第３問 (22)	アイ $+$ ウエ $\sqrt{\text{オ}}$	$40+40\sqrt{5}$	3	
	カ	⓪	2	
	キ	①	3	
	ク x^4- ケ x^3+ コ $x+$ サ	$-x^4-2x^3+2x+1$	4	
	シ $\leqq x<$ ス	$0 \leqq x<1$	1	
	セソ $(x+\text{タ})^2\left(x-\dfrac{\text{チ}}{\text{ツ}}\right)$	$-4(x+1)^2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$	4	
	$\theta=\dfrac{\text{テ}}{\text{ト}}\pi$	$\theta=\dfrac{1}{6}\pi$	5	
		第３問　自己採点小計		
第４問 (16)	初項はア	初項は３	1	
	公差はイ	公差は２	1	
	ウ $n+$ エ	$2n+1$	3	
	$n^{\text{オ}}+$ カ n	n^2+2n	3	
	$p=\dfrac{\text{キ}}{\text{ク}}$，$q=\dfrac{\text{ケ}}{\text{コ}}$ $r=$ サ	$p=\dfrac{1}{2}$，$q=\dfrac{3}{2}$ $r=1$	3	
	シ $\left(\dfrac{1}{b_{k+1}}-\dfrac{1}{b_k}\right)+\dfrac{\text{ス}}{b_k}$	$3\left(\dfrac{1}{b_{k+1}}-\dfrac{1}{b_k}\right)+\dfrac{2}{b_k}$	1	
	セ $\left(\dfrac{1}{k+\text{ソ}}-\dfrac{1}{k+\text{タ}}\right)$	$4\left(\dfrac{1}{k+1}-\dfrac{1}{k+2}\right)$	1	
	$\dfrac{n(n+\text{チ})}{(n+\text{ツ})(n+\text{テ})}$	$\dfrac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)}$	3	
		第４問　自己採点小計		

問題番号(配点)	解答記号	正　解	配点	自己採点
第５問 (16)	$E(X)=$ ア	$E(X)=2$	1	
	$V(X)=\dfrac{\text{イ}}{\text{ウ}}$	$V(X)=\dfrac{6}{5}$	1	
	$E(\overline{X})=\dfrac{\text{エ}}{\text{オ}}$	$E(\overline{X})=\dfrac{2}{5}$	2	
	$\sigma(\overline{X})=\dfrac{\text{カ}}{\text{キク}}$	$\sigma(\overline{X})=\dfrac{1}{50}$	2	
	$Z=$ ケコ $\overline{X}-$ サシ	$Z=50\overline{X}-20$	2	
	0.スセソ	0.683	2	
	$q=$ タ.チツ	$q=1.96$	1	
	テ	②	2	
	0.トナニ 0.ヌネノ	0.201 0.299	3	
		第５問　自己採点小計		
第６問 (16)	$\dfrac{\text{ア}}{\text{イ}}$	$\dfrac{1}{2}$	1	
	ウ，エ	0，0	1	
	$\sqrt{\text{オ}}$	$\sqrt{6}$	2	
	$\dfrac{\text{カ}}{\text{キ}}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$	$\dfrac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$	2	
	$\dfrac{\sqrt{\text{ク}}}{\text{ケコ}}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{12}$	2	
	$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{\text{サ}}}{\text{シ}}$	$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$	2	
	$\dfrac{\text{ス}}{\text{セ}}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$	$\dfrac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$	2	
	$\dfrac{\sqrt{\text{ソ}}}{\text{タ}}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{8}$	4	
		第６問　自己採点小計		
第７問 (16)	ア	2	1	
	イ，ウ	⓪，1	2	
	エオ $<p<$ カ	$-2<p<2$	2	
	キ	⓪	2	
	ク	①	2	
	ケ	⓪	3	
	$\dfrac{\text{コ}}{\text{サ}}\pi+\sqrt{\text{シ}}$	$\dfrac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$	4	
		第７問　自己採点小計		
		自己採点合計		

（注）　第１問～第３問は必答。第４問～第７問のうちから３問選択。計６問を解答。

第１問　式と証明・方程式　（配点　15）

⑴　複素数 x，y についての連立方程式

$$(*)\quad \begin{cases} x+y+xy=3, \\ x^2+y^2=a \end{cases}$$

において，$x=i$ が $(*)$ を満たすとき，

$$\begin{cases} i+y+iy=3, & \cdots ① \\ i^2+y^2=a & \cdots ② \end{cases}$$

が成り立つ．

① より $(1+i)y=3-i$ なので，

$$y=\frac{3-i}{1+i}=\frac{(3-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$$
$$=\frac{3+i^2-3i-i}{1-i^2}=\frac{3-1-4i}{1-(-1)}$$
$$=1-2i.$$

← $i^2=-1$.

したがって，$\boxed{\text{ア}}$ には $\boxed{④}$ が当てはまる．

② より

$$a=i^2+(1-2i)^2$$
$$=i^2+1+4i^2-4i$$
$$=-1+1-4-4i$$
$$=-4-4i.$$

したがって，$\boxed{\text{イ}}$ には $\boxed{⑦}$ が当てはまる．

⑵　x，y に対して

$$(**)\quad \begin{cases} u=x+y, \\ v=xy \end{cases}$$

とおく．$(*)$ は

$$\begin{cases} x+y+xy=3, \\ (x+y)^2-2xy=a \end{cases}$$

← $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$.

であるから，

$$\begin{cases} u+v=3, & \cdots ③ \\ u^2-2v=a & \cdots ④ \end{cases}$$

と書き換えられる．③ から $v=3-u$ であり，これを ④ に代入して，

$$u^2-2(3-u)=a.$$

これより，u は２次方程式

$$u^2+2u+(-a-6)=0 \qquad \cdots ⑤$$

を満たす．したがって，$\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$ には順に $\boxed{②}$，$\boxed{⑧}$ が当てはまる．

(i)　$a=9$ とすると，⑤ は

$$u^2+2u-15=0$$

すなわち

$$(u-3)(u+5)=0$$

となり

$$u=\boxed{3},\ \boxed{-5}$$

を得る．

$u=3$ のとき ③ により $v=3-u=0$ であるから，(**) は

$$\begin{cases} x+y=3, \\ xy=0 \end{cases}$$

となる．2 番目の式から $x=0$ または $y=0$ であるから，

$$(x,\ y)=\left(\boxed{0},\ \boxed{3}\right),\ \left(\boxed{3},\ \boxed{0}\right)$$

である．

また，$u=-5$ のとき ③ により $v=3-u=8$ であるから，(**) は

$$\begin{cases} x+y=-5, \\ xy=8 \end{cases}$$

となる．これより x と y を 2 解にもつ 2 次方程式のひとつは

$$X^2+\boxed{5}X+\boxed{8}=0$$

である．

(ii)　$x+y=u$，$xy=v$ より，x，y は 2 次方程式

$$X^2-uX+v=0$$

の 2 解である．よって，x，y がともに実数となる条件は，この 2 次方程式が実数解をもつこと，つまり判別式 $D \geqq 0$ となることである．

$$D=(-u)^2-4v=u^2-4v$$

であるから，x，y が実数となる条件は

$$u^2-\boxed{4}v \geqq 0 \qquad \cdots ⑥$$

が成り立つことである．

ここで，

$$(*)\quad \begin{cases} x+y+xy=3, \\ x^2+y^2=a \end{cases}$$

において，$x+y=u$，$xy=v$ とおくと，

$$\begin{cases} u+v=3, & \cdots ③ \\ u^2-2v=a. & \cdots ④ \end{cases}$$

実数の組 $(x,\ y)$ が存在する条件は，③ かつ ④ かつ ⑥ を満たす実数 u，v が存在することである．

③，④より u の 2 次方程式

$$u^2+2u-6-a=0 \qquad \cdots ⑤$$

が得られた．

③，⑥ より v を消去すると，

$$u^2-4(3-u) \geqq 0$$

すなわち

$$(u+6)(u-2) \geqq 0$$

が得られるので，u は

(**)　$\begin{cases} u=x+y, \\ v=xy. \end{cases}$

← x，y を 2 解にもつ 2 次方程式のひとつは

$$(X-x)(X-y)=0$$

つまり

$$X^2-(x+y)X+xy=0$$

である．

← 2 次方程式

$ax^2+bx+c=0$　(a，b，c は実数)

において，

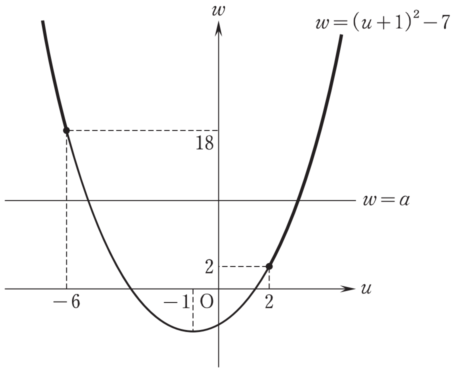
$$D=b^2-4ac.$$

$$u \leqq -6,\ 2 \leqq u \qquad \cdots ⑦$$

を満たす．これより，u の方程式 ⑤ が ⑦ の範囲内に少なくとも 1 つ解をもつ条件を求めればよい．⑤ は

$$u^2 + 2u - 6 = a$$

と変形できる．⑤ の実数解は uw 座標平面において曲線 $w = u^2 + 2u - 6$ と直線 $w = a$ との共有点の u 座標である．



よって，グラフが ⑦ の範囲で共有点をもつ条件を考えて，求める a の値の範囲は

$$a \geqq \boxed{2}$$

である．

第 2 問　対数関数，図形と方程式，定積分　（配点　15）

$$1 + \log_2 x + \log_2(3 - x)$$

において，対数の真数は正であるから

$$x > 0 \quad かつ \quad 3 - x > 0$$

すなわち

$$0 < x < 3 \qquad \cdots ①$$

である．この条件の下で

$$\begin{aligned} 1 + \log_2 x + \log_2(3 - x) &= \log_2 2 + \log_2 x + \log_2(3 - x) \\ &= \log_2 2x(3 - x) \\ &= \log_2\left(\boxed{6}\,x - \boxed{2}\,x^2\right) \end{aligned}$$

となる．これにより，不等式

$$\log_2\left(y - x^2\right) < 1 + \log_2 x + \log_2(3 - x) \qquad \cdots (*)$$

は，

$$y > x^2 \qquad \cdots ②$$

と ① の条件の下で

$$\log_2\left(y - x^2\right) < \log_2\left(6x - 2x^2\right)$$

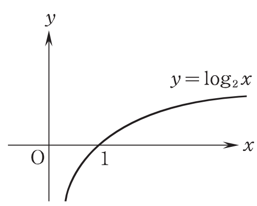
と書き直される．底の 2 は 1 より大きいので，これより

$$y - x^2 < 6x - 2x^2$$

すなわち

← $\log_a a = 1$.

← $a > 0,\ a \neq 1,\ M > 0,\ N > 0$ とすると
$\log_a M + \log_a N = \log_a MN$.



← 関数 $y = \log_2 x$ は単調増加なので，x_1，x_2 が正のとき
$\log_2 x_1 < \log_2 x_2 \iff x_1 < x_2$
である．

$$y < -x^2 + 6x \quad \cdots ③$$

を得る．

よって，(*)が表す領域 D は ① かつ ② かつ ③ すなわち

(i)　不等式　$0 < x < 3$ の表す領域

(ii)　不等式　$y > x^2$ の表す領域

(iii)　不等式　$y < -x^2 + 6x$ の表す領域

の３つの領域の共通部分である．

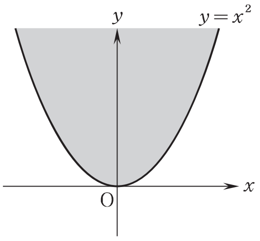


図１

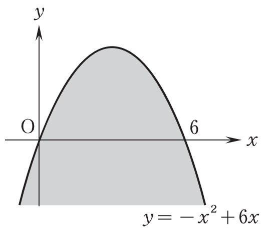


図２

いずれの図も境界は含まない．

$y > x^2$ の表す領域は，上の図１の網目部分である．

また，$y < -x^2 + 6x$ の表す領域は，$y = -x^2 + 6x$ が x 軸と２点 $(0,\ 0)$，$(6,\ 0)$ において交わることに注意すると，上の図２の網目部分となる．

よって，$\boxed{ウ}$ と $\boxed{エ}$ には $\boxed{⑤}$ と $\boxed{⓪}$ または $\boxed{⓪}$ と $\boxed{⑤}$ が当てはまる．

(i)　不等式　$0 < x < 3$　の表す領域

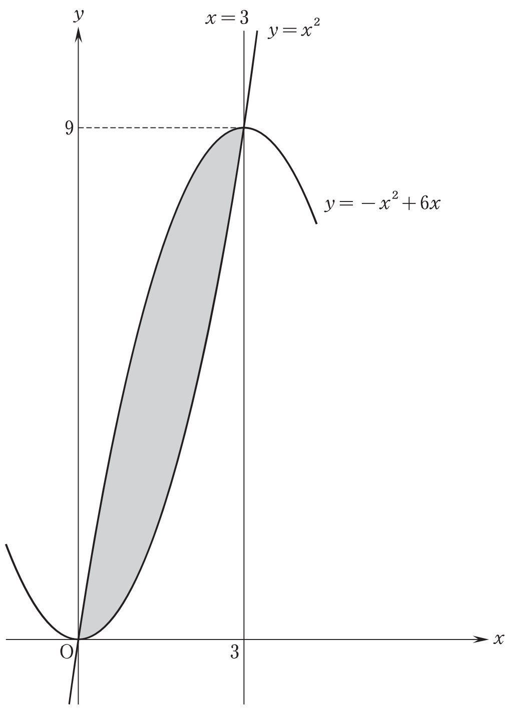
(ii)　不等式　$y > x^2$　の表す領域

(iii)　不等式　$y < -x^2 + 6x$　の表す領域

の３つの領域の共通部分に，それぞれの境界(放物線など)を追加した図形は次図の網目を付した部分である．

← 図１は問題文中の ⑤ に，図２は同じく ⓪ に対応する．

6



求める面積を S とする．

$$S=\int_0^3\left\{\left(-x^2+6x\right)-x^2\right\}dx=\int_0^3\left(-2x^2+6x\right)dx$$

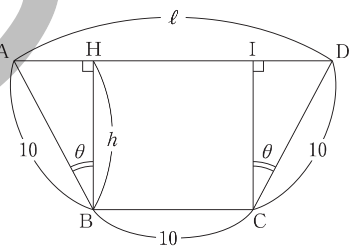
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+3x^2\right]_0^3=\left(-\frac{2}{3}\times3^3+3\times3^2\right)-0$$

$$=-18+27=\boxed{9}$$

である．

第 3 問　三角関数，微分法　（配点　22）

⑴



2 点 H，I を上図のように定める．

$$S=\frac{1}{2}(\mathrm{AD}+\mathrm{BC})\times\mathrm{BH}$$

と表される．

$\tan\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき，a を正の数として

$$\mathrm{BH}=\mathrm{CI}=2a,\quad \mathrm{AH}=\mathrm{DI}=a$$

とおくことができる．

直角三角形 ABH において

$$AB^2 = BH^2 + AH^2$$

が成り立つから

$$10^2 = (2a)^2 + a^2 \text{ より } a^2 = 20$$

となり，$a = 2\sqrt{5}$ である．

これより

$$\ell = AH + HI + ID = 2a + 10 = 4\sqrt{5} + 10,$$
$$BH = 2a = 4\sqrt{5}, \quad BC = 10$$

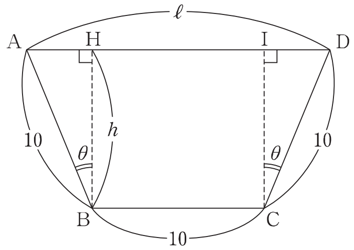
← $AH = DI = a$,
$BH = 2a$.

となるので

$$S = \frac{1}{2}\left(4\sqrt{5} + 10 + 10\right) \times 4\sqrt{5}$$
$$= \boxed{40} + \boxed{40}\sqrt{\boxed{5}}$$

である．

(2)



直角三角形 ABH に注目して，

$$\frac{BH}{AB} = \cos\theta.$$

$AB = 10$, $BH = h$ から $h = 10\cos\theta$ なので，$\boxed{\text{カ}}$ には $\boxed{⓪}$ が当てはまる．

← 単位の「cm」を省略して解答している．

また，$\triangle ABH \equiv \triangle DCI$ から $AH = DI$ である．

三角形 ABH において

$$\frac{AH}{AB} = \sin\theta$$

から $AH = 10\sin\theta$．さらに四角形 BCIH が長方形であることから $HI = 10$ なので

$$\ell = AH + HI + ID$$
$$= 10\sin\theta + 10 + 10\sin\theta$$
$$= 10 + 2 \times 10\sin\theta$$

となり $\boxed{\text{キ}}$ には $\boxed{①}$ が当てはまる．

台形 ABCD の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}(10 + \ell) \cdot h$$
$$= \frac{1}{2}(10 + 10 + 20\sin\theta) \cdot 10\cos\theta$$
$$= 10^2(1 + \sin\theta)\cos\theta$$

← $S = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot BH$.

なので

8

$$S^2 = 10^4(1+\sin\theta)^2\cos^2\theta$$
$$= 10^4(1+\sin\theta)^2\left(1-\sin^2\theta\right).$$

$\sin\theta = x$ とおくと

$$S^2 = 10^4(1+x)^2\left(1-x^2\right)$$
$$= 10^4\left(x^2+2x+1\right)\left(1-x^2\right)$$
$$= 10^4\left(\boxed{-}\,x^4 - \boxed{2}\,x^3 + \boxed{2}\,x + \boxed{1}\right)$$

となる．

$$f(x) = -x^4 - 2x^3 + 2x + 1$$

とおく．$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のとき $0 \leqq \sin\theta < 1$ であるから，x のとり得る値の範囲は $\boxed{0} \leqq x < \boxed{1}$ である．

また

$$f'(x) = -4x^3 - 6x^2 + 2$$
$$= -2\left(2x^3+3x^2-1\right)$$
$$= -2(x+1)\left(2x^2+x-1\right)$$
$$= -2(x+1)(x+1)(2x-1)$$
$$= \boxed{-4}\left(x+\boxed{1}\right)^2\left(x-\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}\right)$$

← $g(x) = 2x^3+3x^2-1$

とすると

$g(-1) = -2+3-1 = 0$

から $g(x)$ は $x+1$ を因数にもち

$g(x) = (x+1)\left(2x^2+x-1\right)$

と変形できる．

である．$0 \leqq x < 1$ で $-4(x+1)^2 < 0$ に注意すると，$f(x)$ の増減は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	(1)
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	極大	↘	

したがって，$f(x)$ は $x = \dfrac{1}{2}$ で最大となることがわかり，このとき S^2 は最大となるので，S も最大となる．

$x = \dfrac{1}{2}$ から $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$ であり，$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ において，$\theta = \dfrac{\boxed{1}}{\boxed{6}}\pi$ とすると S は最大となることがわかる．

← $\sin\theta = x$.

第4問　数　　列　（配点　16）

(1)　等差数列 $\{a_n\}$ の初項を a，公差を d とおく．

$$a_1,\quad a_2,\quad a_3,\quad a_4,\quad a_5,\ \cdots$$
$$a \xrightarrow{+d} 5 \xrightarrow{+d} \bigcirc \xrightarrow{+d} \bigcirc \xrightarrow{+d} 11$$

すると数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = a + (n-1)d \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

と表されるので，$a_2 = 5$，$a_5 = 11$ から

← 図から

$$\begin{cases} 3d = 11-5, \\ a = 5-d \end{cases}$$

とわかり

$d = 2$,　$a = 3$

を導くこともできる．

$$\begin{cases} a+d=5, \\ a+4d=11. \end{cases}$$

したがって $d=2$，$a=3$ となるので，数列 $\{a_n\}$ の

初項は $\boxed{3}$，公差は $\boxed{2}$

である．数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=3+2(n-1)=\boxed{2}\,n+\boxed{1}$$

となり，初項から第 n 項までの和 S_n は

$$\begin{aligned} S_n&=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2} \\ &=\frac{n\{6+2(n-1)\}}{2} \\ &=n^{\boxed{2}}+\boxed{2}\,n. \end{aligned}$$

← $S_n=\dfrac{a+a_n}{2}\cdot n$

$\quad=\dfrac{3+(2n+1)}{2}\cdot n$

$\quad=n^2+2n$

としてもよい．

(2)　数列 $\{b_n\}$ は，この S_n に対して

$$b_{n+1}=3b_n-S_n \qquad \cdots ①$$

を満たす．さらに $b_n=pn^2+qn+r$ と表されるので

← $b_{n+1}-3b_n=-S_n$ がすべての自然数 n に対して成り立つ．

$$\begin{aligned} &b_{n+1}-3b_n \\ &=p\{(n+1)^2-3n^2\}+q\{(n+1)-3n\}+(r-3r) \\ &=p(-2n^2+2n+1)+q(-2n+1)-2r \\ &=-2pn^2+(2p-2q)n+(p+q-2r). \end{aligned}$$

① により，これがすべての自然数 n に対して

$$-S_n=-n^2-2n$$

に一致するので，係数を比較して

$$\begin{cases} -2p=-1, \\ 2p-2q=-2, \\ p+q-2r=0 \end{cases}$$

が成り立つ．したがって

$$p=\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}},\quad q=\frac{\boxed{3}}{\boxed{2}},\quad r=\boxed{1}$$

となり

$$b_n=\frac{1}{2}n^2+\frac{3}{2}n+1 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots). \qquad \cdots ②$$

(3)　① により $S_k=3b_k-b_{k+1}$ であるので

$$\begin{aligned} \frac{S_k}{b_kb_{k+1}}&=\frac{3b_k-b_{k+1}}{b_kb_{k+1}} \\ &=\frac{3}{b_{k+1}}-\frac{1}{b_k} \\ &=\boxed{3}\left(\frac{1}{b_{k+1}}-\frac{1}{b_k}\right)+\frac{\boxed{2}}{b_k} \end{aligned} \qquad \cdots ③$$

となる．さらに ② から

$$b_k=\frac{k^2+3k+2}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

を得るので

$$\frac{1}{b_k}=\frac{2}{(k+1)(k+2)}=2\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right).$$

← 部分分数に分けている.

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{(k+2)-(k+1)}{(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}$$

と変形してもよい.

③ に代入し

$$\frac{S_k}{b_k b_{k+1}}$$
$$=3\left(\frac{1}{b_{k+1}}-\frac{1}{b_k}\right)+\boxed{4}\left(\frac{1}{k+\boxed{1}}-\frac{1}{k+\boxed{2}}\right).$$

これを $k=1$, 2, 3, …, $n-1$, n について加えた和が T_n であるので

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{S_k}{b_k b_{k+1}}$$
$$=3\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{b_k}+\frac{1}{b_{k+1}}\right)+4\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$

となる. ここで

$$\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{b_k}+\frac{1}{b_{k+1}}\right)$$
$$=\left(-\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}\right)+\left(-\frac{1}{b_2}+\frac{1}{b_3}\right)+\left(-\frac{1}{b_3}+\frac{1}{b_4}\right)$$
$$+\cdots+\left(-\frac{1}{b_{n-1}}+\frac{1}{b_n}\right)+\left(-\frac{1}{b_n}+\frac{1}{b_{n+1}}\right)$$

← 先頭の $-\frac{1}{b_1}$ と最後の $\frac{1}{b_{n+1}}$ を残し, 他はすべて消える.

$$=-\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_{n+1}}$$
$$=-\frac{1}{3}+\frac{2}{(n+2)(n+3)}$$

← $b_1=3$.
$b_k=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

であり, さらに

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)$$
$$+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$$

であるので

$$T_n=3\left\{-\frac{1}{3}+\frac{2}{(n+2)(n+3)}\right\}+4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=1+\frac{6}{(n+2)(n+3)}-\frac{4}{n+2}$$
$$=\frac{(n^2+5n+6)+6-4(n+3)}{(n+2)(n+3)}$$
$$=\frac{n^2+n}{(n+2)(n+3)}=\frac{n(n+\boxed{1})}{(n+\boxed{2})(n+\boxed{3})}.$$

$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

【参考】

$$\frac{S_k}{b_k b_{k+1}}=\frac{4k}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$

← $S_k=k(k+2)$.
$b_k=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

である．分子の k を

$$k=\frac{1}{2}\{3(k+1)-(k+3)\}$$

と書き換えて

$$\begin{aligned}\frac{S_k}{b_k b_{k+1}}&=\frac{2\{3(k+1)-(k+3)\}}{(k+1)(k+2)(k+3)}\\&=\frac{6}{(k+2)(k+3)}-\frac{2}{(k+1)(k+2)}\\&=6\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)-2\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)\end{aligned}$$

← $\frac{1}{(k+2)(k+3)}=\frac{(k+3)-(k+2)}{(k+2)(k+3)}=\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}$

としてもよい．

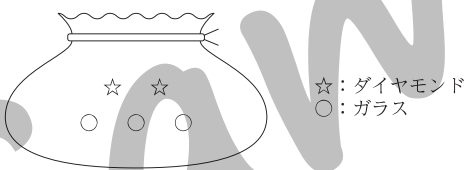
を得る．$k=1$，2，…，n について和をとると

$$\begin{aligned}T_n&=6\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}\right)-2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)\\&=1-\frac{6}{n+3}+\frac{2}{n+2}=\frac{n^2+n}{(n+2)(n+3)}\end{aligned}$$

となる．

第5問　統計的な推測　（配点　16）

(1)



袋の中の5個の玉を区別できるとする．

袋から1個の玉を取り出し，元に戻すことを n 回繰り返す．k 回目の取り出しで取った玉が

$$\begin{cases}\text{ダイヤモンドのとき} & X_k=1,\\ \text{ガラス　　　のとき} & X_k=0\end{cases}\qquad\cdots①$$

と定めると

$$X=X_1+X_2+\cdots+X_n$$

は n 回の取り出しのうちダイヤモンドを取る回数を表す．各回の取り出しで，ダイヤモンドを取る確率は $\frac{2}{5}$ であるので，

確率変数 X は二項分布 $B\left(n,\ \frac{2}{5}\right)$ に従う

こととなる．

(i)　$n=5$ であり，X は二項分布 $B\left(5,\ \frac{2}{5}\right)$ に従う．したがって

12

$$E(X)=5\cdot\frac{2}{5}=\boxed{2},$$

$$V(X)=5\cdot\frac{2}{5}\cdot\left(1-\frac{2}{5}\right)=\frac{\boxed{6}}{\boxed{5}}.$$

← 確率変数 X が二項分布 $B(n,\ p)$ に従うとき，

$$E(X)=np,$$
$$V(X)=np(1-p).$$

(ii) 同様に自然数 n に対して

$$E(X)=\frac{2}{5}n,$$

$$V(X)=n\cdot\frac{2}{5}\cdot\left(1-\frac{2}{5}\right)=\frac{6}{25}n$$

となる．さらに

$$\overline{X}=\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}=\frac{1}{n}X$$

であるので

$$E\left(\overline{X}\right)=\frac{1}{n}E(X)=\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{5}n=\frac{\boxed{2}}{\boxed{5}},$$

$$V\left(\overline{X}\right)=\frac{1}{n^2}V(X)=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{6}{25}n=\frac{6}{25n}$$

← $E(aX+b)=aE(X)+b,$
$V(aX+b)=a^2V(X).$

となる．

いま $n=600$ であり

$$V\left(\overline{X}\right)=\frac{6}{25\times600}=\frac{1}{25\times100}=\left(\frac{1}{50}\right)^2$$

が導かれて，$\overline{X}$ の標準偏差は

$$\sigma\left(\overline{X}\right)=\sqrt{V\left(\overline{X}\right)}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{50}}.$$

$n=600$ のとき $\overline{X}$ は近似的に正規分布に従うとしてよい．

$E\left(\overline{X}\right)=\frac{2}{5}$，$\sigma\left(\overline{X}\right)=\frac{1}{50}$ であるので，$\overline{X}$ に対し

$$Z=\frac{\overline{X}-\frac{2}{5}}{\frac{1}{50}}=\boxed{50}\,\overline{X}-\boxed{20}$$

← 一般に，X が正規分布に従い，その
$\begin{cases}\text{平均が } m, \\ \text{標準偏差が } \sigma\end{cases}$
とする．このとき

$$Z=\frac{X-m}{\sigma}$$

で定まる Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う．

により定めた確率変数 Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うと考えられる．

$\overline{X}$ についての不等式 $\frac{19}{50}\leqq\overline{X}\leqq\frac{21}{50}$ は Z についての不等式

$$-1\leqq Z\leqq1$$

に同じである．

正規分布表から $0\leqq Z\leqq1$ である確率が 0.3413 とわかるので，

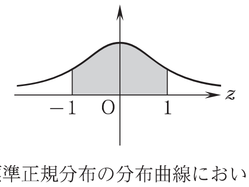
$\frac{19}{50}\leqq\overline{X}\leqq\frac{21}{50}$ となる確率は

$$2\times0.3413=0.6826$$

となる．ここでは小数第 4 位を四捨五入した値

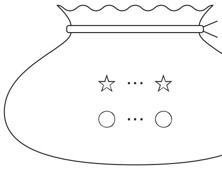
$$0.\boxed{683}$$

が答となる．

← 

標準正規分布の分布曲線において，この網目部分の面積を求めている．

(2)



☆：ダイヤモンド
○：ガラス
（☆の割合が p）

袋から１個の玉を取り出し，元に戻すことを n 回繰り返す．k 回目の取り出しで，取った玉が

$$\begin{cases} \text{ダイヤモンドのとき} & X_k=1, \\ \text{ガラス　　　のとき} & X_k=0 \end{cases}$$

と定め，さらに

$$X=X_1+X_2+X_3+\cdots+X_n,$$
$$\overline{X}=\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}=\frac{1}{n}X$$

とする．

X は n 回のうちダイヤモンドを取った回数，

$\overline{X}$ は n 回のうちダイヤモンドを取った割合

を表す．いま X は二項分布 $B(n,\ p)$ に従うので

$$E(X)=np,$$
$$V(X)=np(1-p)$$

となる．したがって　$\overline{X}=\frac{1}{n}X$ から

$$E\left(\overline{X}\right)=\frac{1}{n}\cdot E(X)=\frac{1}{n}\cdot np=p,$$
$$V\left(\overline{X}\right)=\frac{1}{n^2}\cdot V(X)=\frac{np(1-p)}{n^2}=\frac{p(1-p)}{n}$$

を得る．

← $\overline{X}$ の値は袋の中のダイヤモンドの割合 p に近いと考えてよい．
　p の値がわからなくても，$\overline{X}$ の値は調査により求めることができるので，$\overline{X}$ の値から p の値（の範囲）を推定する．

$$Z=\frac{\overline{X}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$$

により定めた確率変数 Z は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う．正規分布表を用いると

$$-1.96\leqq\frac{\overline{X}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\leqq 1.96 \qquad \cdots ③$$

が成り立つ確率が 0.95 であることがわかる．

← 分子と分母に n を掛け，$n\overline{X}=X$ を用いると，不等式の中辺は
$$\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}$$
となるが，これは選択肢 ⓪ の中辺とは異なっている．

n の値が十分に大きい場合，③ において $\overline{X}$ の標準偏差に相当する部分 $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ は，標本調査で得られる値 $\sqrt{\frac{\overline{X}\left(1-\overline{X}\right)}{n}}$ に置き換えてよい．

すると ③ は

$$-1.96\leqq\frac{\overline{X}-p}{\sqrt{\frac{\overline{X}\left(1-\overline{X}\right)}{n}}}\leqq 1.96 \qquad \cdots ③'$$

となる．これは $q=$ $\boxed{1}$. $\boxed{96}$ を不等式 $\boxed{②}$ に代入したものであ

る．

(3)　$n=300$，$\overline{X}=\frac{1}{4}$ のとき

$$\frac{\overline{X}\left(1-\overline{X}\right)}{n}=\frac{1}{300}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\left(\frac{1}{40}\right)^2$$

であるので，③′ は

$$-\frac{1.96}{40}\leqq\frac{1}{4}-p\leqq\frac{1.96}{40}$$

となる．これは $-0.049\leqq 0.25-p\leqq 0.049$ となるので，p について整理すると

$$0.\boxed{201}\leqq p\leqq 0.\boxed{299}$$

が導かれる．この不等式が成り立つ確率が 0.95 であるので，この不等式が p に対する信頼度 95%の信頼区間を与えている．

第６問　空間ベクトル　（配点　16）

正四面体 OABC の一辺の長さは 1 であり

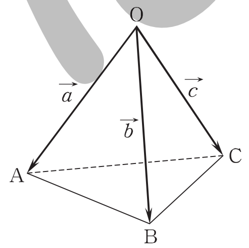
$$\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|=1.$$

また $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角は 60° であるので

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos 60^\circ=1\cdot1\cdot\frac{1}{2}.$$

同様にして

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}.$$



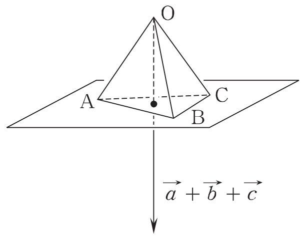
辺の長さはすべて 1 で，側面，底面はすべて正三角形．

また，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}-\vec{a}$ であるので

$$\begin{aligned}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=\left\{\left(\vec{b}+\vec{a}\right)+\vec{c}\right\}\cdot\left(\vec{b}-\vec{a}\right)\\&=\left(\vec{b}+\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{b}-\vec{a}\right)+\vec{c}\cdot\left(\vec{b}-\vec{a}\right)\\&=\left|\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}\right|^2+\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\vec{a}\\&=1^2-1^2+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\boxed{0}\end{aligned}$$

となる．$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}-\vec{a}$ であるので

$$\begin{aligned}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}&=\left\{\left(\vec{c}+\vec{a}\right)+\vec{b}\right\}\cdot\left(\vec{c}-\vec{a}\right)\\&=\left|\vec{c}\right|^2-\left|\vec{a}\right|^2+\vec{b}\cdot\left(\vec{c}-\vec{a}\right)\\&=\left|\vec{c}\right|^2-\left|\vec{a}\right|^2+\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}=\boxed{0}.\end{aligned}$$



これらの内積が 0 であるので

$$\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}\quad かつ\quad\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

となり，$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ は平面 ABC に垂直であることがわかる．

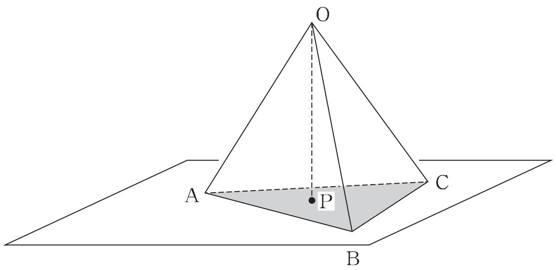
一方，

$$\begin{aligned}\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|^2=&\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+\left|\vec{c}\right|^2\\&+2\left(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}\right)\end{aligned}$$

$$=1^2+1^2+1^2+2\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)$$
$$=6$$

となるので，$\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|=\sqrt{\boxed{6}}$ である．

⑴



Ｏを通り $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ に平行な直線上に点Ｐはあるので

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\quad (k\text{ は実数})\qquad \cdots ①$$

と表される．つまり

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\vec{a}+k\vec{b}+k\vec{c}.$$

ここで，点Ｐは平面ABC上にあるので

$$k+k+k=1,\qquad \text{つまり}\quad k=\frac{1}{3}.$$

① に代入することにより

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{3}}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right).$$

正四面体OABCの体積を V，正三角形ABCの面積を S とおく．$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は平面ABCに垂直であるので，

$$V=\frac{1}{3}S\times\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\qquad \cdots ②$$

となる．正三角形ABCの１辺の長さは１であるから

$$S=\frac{1}{2}\cdot 1^2\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

また，$\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|=\sqrt{6}$ であるので

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|=\frac{1}{3}\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

したがって，② から

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{\boxed{2}}}{\boxed{12}}.$$

⑵　$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$ のなす角を θ とすると

$$\cos\theta=\frac{\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\cdot\vec{a}}{\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|\left|\vec{a}\right|}$$

となる．ここで，$\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|=\sqrt{6}$，$\left|\vec{a}\right|=1$ であり

$$\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\cdot\vec{a}=\left|\vec{a}\right|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{a}$$

← 点Ｐは「点Ｏから平面ABCへ下ろした垂線の足」である．正四面体OABCにおいて，そのような点は三角形ABCの重心であるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

を導くこともできる．

← 四面体OABCにおいて

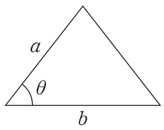
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

を満たす点Ｐが平面ABC上にある条件は

$$\alpha+\beta+\gamma=1$$

が成り立つことである．

←



図の三角形の面積は

$$\frac{1}{2}ab\sin\theta.$$

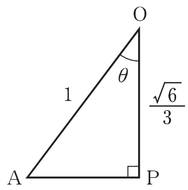
← $\vec{u}$ と $\vec{v}$ のなす角を θ とすると，内積の定義から

$$\cos\theta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|}.$$

$$= 1^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$
$$= 2$$

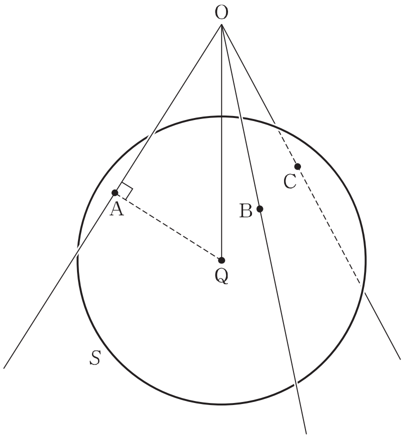
であるので，

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{6}\cdot 1} = \frac{\sqrt{\boxed{6}}}{\boxed{3}}.$$

← 

上の図から $\cos\theta = \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OA}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ としてもよい．

(3)



【解 1】（**太郎さんの考え**に従う）

$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ と $\vec{b}$ あるいは $\vec{c}$ とのなす角の余弦はどちらも $\cos\theta$ となるので，$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ と $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ のなす角は等しい．

一方，点 Q を中心とする球 S が 3 本の半直線 OA，OB，OC と接するので

$$\angle\mathrm{QOA} = \angle\mathrm{QOB} = \angle\mathrm{QOC}.$$

← $\triangle\mathrm{QOA} \equiv \triangle\mathrm{QOB} \equiv \triangle\mathrm{QOC}$ から導かれる．

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \ell(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) \quad (\ell \text{ は実数}) \qquad \cdots ①'$$

と表される．半直線 OA と球 S は点 A で接するので

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = 0. \qquad \cdots ③$$

①′ から

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \ell(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) - \vec{a}$$

を得るので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \vec{a}\cdot\{\ell(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) - \vec{a}\}$$
$$= \ell(|\vec{a}|^2 + \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{c}\cdot\vec{a}) - |\vec{a}|^2$$
$$= \ell\left(1^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) - 1^2 = 2\ell - 1.$$

したがって ③ は $2\ell - 1 = 0$ となって

$$\ell = \frac{1}{2}.$$

①′ に代入すると

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}).$$

【解 2】（**花子さんの考え**に従う）

$\angle QOA = \angle QOB = \angle QOC$ であるので

$$\overrightarrow{OQ} = \ell\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right) \quad (\ell > 0) \qquad \cdots ①'$$

と表せる．

3 点 O，A，Q を通る平面に注目する．直角三角形 OAQ において

$$OA = 1, \qquad \angle QOA = \theta$$

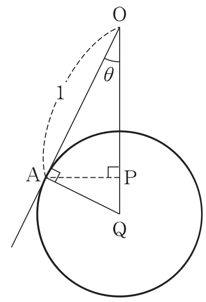
である．

$\dfrac{OA}{OQ} = \cos\theta = \dfrac{2}{\sqrt{6}} \left(= \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$ であるから

$$\left|\overrightarrow{OQ}\right| = \frac{\sqrt{6}}{2}OA = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

さらに $\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right| = \sqrt{6}$ であるから，$\overrightarrow{OQ}$ と $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ の長さ（大きさ）の比は 1：2 となる．よって ①′ から

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right).$$



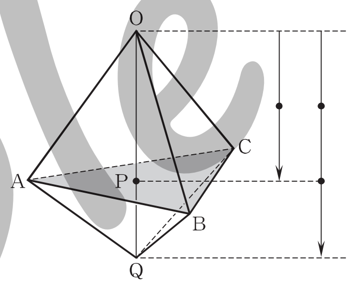
【解 1，解 2 をまとめる】

$\overrightarrow{OP} = \dfrac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$ であるので，どちらの方法をとっても

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OP}.$$

したがって，正四面体 OABC と四面体 QABC の体積の和を W とすると，

$$W = \frac{3}{2}V = \frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{12} = \frac{\sqrt{\boxed{2}}}{\boxed{8}}.$$



四面体 QABC の体積は

$$\frac{1}{2}V = \frac{\sqrt{2}}{24}.$$

これと $V = \dfrac{\sqrt{2}}{12}$ の和を求めてもよい．

第 7 問　複素数平面　（配点　16）

p は実数の定数とし，3 次方程式

$$z^3 - (p+2)z^2 + (2p+1)z - 2 = 0 \qquad \cdots ①$$

を考える．

(1)　① は $p\left(-z^2+2z\right) + z^3 - 2z^2 + z - 2 = 0$ つまり

$$-pz(z-2) + (z-2)\left(z^2+1\right) = 0$$

と変形できる．これはさらに

$$(z-2)\left(z^2 - pz + 1\right) = 0$$

と書き直される．これより ① は

$$\begin{cases} z = \boxed{2} \\ \text{または} \\ z^2 - pz + \boxed{1} = 0 \end{cases} \qquad \cdots ②$$

に同じである．よって $\boxed{イ}$ には $\boxed{0}$ が当てはまる．

← ① の左辺は，z については 3 次式，p については 1 次式である．次数が低い p について整理した．

18

2 次方程式 ② が虚数解をもつための条件は，② の判別式を D とすると

「$D<0$ となる」

ことである．ここで

$$D=(-p)^2-4\times1\times1=p^2-4$$
$$=(p+2)(p-2)$$

であるので，$D<0$ より p のとり得る値の範囲は

$$\boxed{-2}<p<\boxed{2} \quad \cdots③$$

となる．

① の 3 つの解が α，$\overline{\alpha}$，2 のとき，② の 2 解は α，$\overline{\alpha}$ であるから解と係数の関係より

$$\begin{cases}\alpha+\overline{\alpha}=p, & \cdots④\\ \alpha\overline{\alpha}=1 & \cdots⑤\end{cases}$$

← 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解を α，β とすると $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$，$\alpha\beta=\frac{c}{a}$.

である．これより $\boxed{キ}$ には $\boxed{⓪}$ が当てはまり，$\boxed{ク}$ には $\boxed{①}$ が当てはまる．

(2) いま，p が ③ を満たして変化するものとする．

このとき複素数平面上で 2 点 α，$\overline{\alpha}$ の描く図形を考える．

x，y は実数として

$$\alpha=x+yi,\quad \overline{\alpha}=x-yi$$

とおくことができる．すると

$$\alpha+\overline{\alpha}=2x,\quad \alpha\overline{\alpha}=x^2+y^2$$

である．ここで，p は ③ を満たすので ④ より

$$-2<\alpha+\overline{\alpha}<2$$

← $-2<2x<2$ となる．

つまり

$$-1<x<1$$

である．

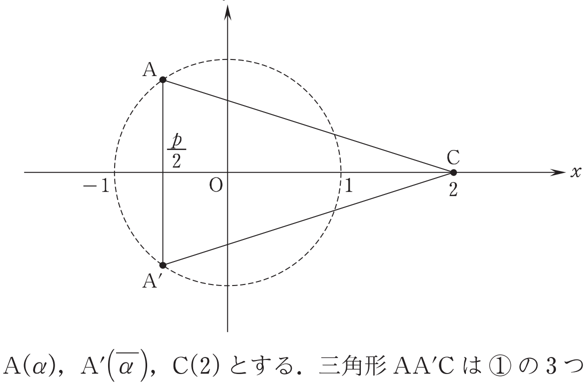
また ⑤ より

$$x^2+y^2=1.$$

よって $\boxed{ケ}$ には $\boxed{⓪}$ が当てはまる．

← 2 点 -1，1 は含まれない．

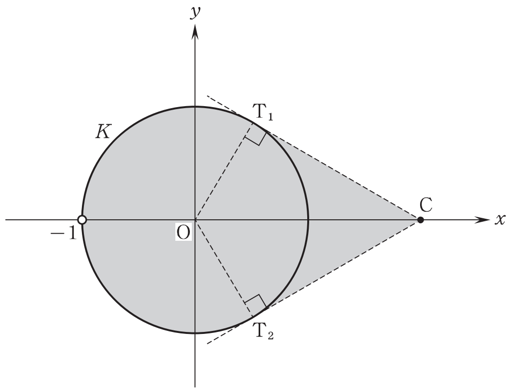
(3) 複素数平面上で ① の 3 つの解を頂点にもつ三角形を考える．



図で A(α)，A′($\overline{\alpha}$)，C(2) とする．三角形 AA′C は ① の 3 つの解を頂点にもつ三角形である．

p が ③ を満たして変化するとき，2 点 A，A′ も動く．

このとき，三角形 AA′C の周と内部が通過してできる領域を E とすると，E は次図の網目部分である．



← 点 -1 は E に含まれない．
領域 E を扇形と直角三角形 2 つに分けて面積を求める．

中心が原点，半径が 1 の円の周を K とする．

K 上に 2 点 $\mathrm{T_1}$，$\mathrm{T_2}$ を図のように

$$\mathrm{OT_1} \perp \mathrm{CT_1},\quad \mathrm{OT_2} \perp \mathrm{CT_2}$$

となるようにとる．すると

← 点 C から K に 2 本の接線を引き，接点を $\mathrm{T_1}$，$\mathrm{T_2}$ としている．

$$\mathrm{OT_1} = \mathrm{OT_2} = 1,\quad \mathrm{OC} = 2 \text{ で } \angle \mathrm{OT_1C} = \angle \mathrm{OT_2C} = \frac{\pi}{2}$$

なので

$$\angle \mathrm{COT_1} = \angle \mathrm{COT_2} = \frac{\pi}{3}$$

である．よって

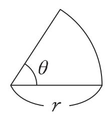
$$\angle \mathrm{T_1OT_2} = \frac{2}{3}\pi$$

となる．

図の中心角 $\frac{4}{3}\pi$ の扇形の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \frac{4}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi.$$

←



半径 r，中心角 θ の扇形の面積は

$$\frac{1}{2}r^2\theta.$$

また，直角三角形 $\mathrm{OCT_1}$ において $\mathrm{CT_1} = \sqrt{3}$ であるから三角形 $\mathrm{OCT_1}$ の面積は

$$\frac{1}{2}\mathrm{OT_1} \cdot \mathrm{CT_1} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

である．

求める領域 E の面積は

$$\frac{2}{3}\pi + 2 \times \triangle \mathrm{OCT_1} = \frac{2}{3}\pi + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\boxed{2}}{\boxed{3}}\pi + \sqrt{\boxed{3}}$$

である．

MEMO