Chapter 9

平面上の曲線と複素数平面

9 ……………………………………………… B 解答時間 12 分

解説 333ページ

i は虚数単位とする．複素数 w と 0 でない複素数 z が

$$w=z+\frac{2}{z}$$

を満たしている．

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$w=x+yi$（$r$ は正の実数，θ，x，y は実数）とおくとき，x，y を r，θ を用いて表すと，

$$x=\boxed{\text{ア}},\quad y=\boxed{\text{イ}}$$

となる．

$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい．）

⓪ $\left(r+\frac{2}{r}\right)\sin\theta$	① $\left(r+\frac{2}{r}\right)\cos\theta$	② $\left(r-\frac{2}{r}\right)\sin\theta$	③ $\left(r-\frac{2}{r}\right)\cos\theta$
④ $\left(\frac{2}{r}-r\right)\sin\theta$	⑤ $\left(\frac{2}{r}-r\right)\cos\theta$	⑥ $\left(r+\frac{1}{r}\right)\sin\theta$	⑦ $\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta$

(1) 複素数平面上で，点 z が原点を中心とする半径 2 の円周上を動くとき，$r=\boxed{\text{ウ}}$ であり，点 w が描く曲線の概形は $\boxed{\text{エ}}$ となる．

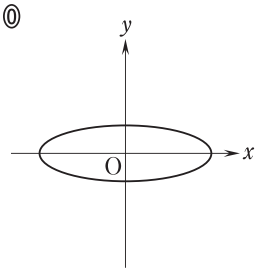
(2) $\theta=-\dfrac{\pi}{4}$ とする．

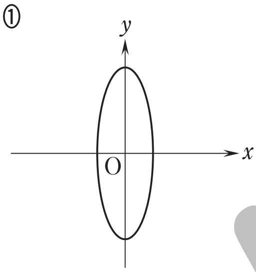
このとき，

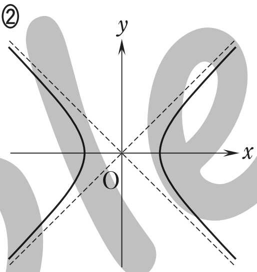
$$x-y=\sqrt{\boxed{\text{オ}}}\,r,\qquad x+y=\frac{\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{r}$$

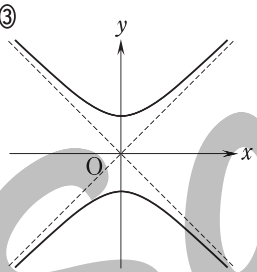
となり，さらに，複素数平面上で点 z が $r>0$ を満たして動くとき，点 w が描く曲線の概形は $\boxed{\text{ク}}$ となる．

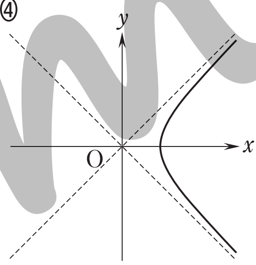
$\boxed{\text{エ}}$，$\boxed{\text{ク}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ．ただし，同じものを繰り返し選んでもよい．

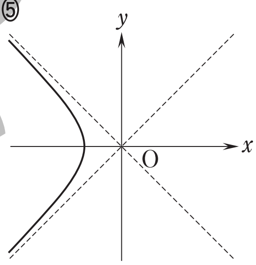
⓪


①


②


③


④


⑤


ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク

9

解答記号		正　解	チェック
ア		①	
イ		②	
(1)	$r=$ ウ	$r=2$	
	エ	⓪	

解答記号		正　解	チェック
(2)	$x-y=\sqrt{\text{オ}}\,r$	$x-y=\sqrt{2}\,r$	
	$x+y=\dfrac{\text{カ}\sqrt{\text{キ}}}{r}$	$x+y=\dfrac{2\sqrt{2}}{r}$	
	ク	④	

【解説】

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ を $w=z+\dfrac{2}{z}$ に代入すると，

$$\begin{aligned} w&=r(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{2}{r(\cos\theta+i\sin\theta)}\\ &=r(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{2}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)\\ &=\left(r+\frac{2}{r}\right)\cos\theta+i\left(r-\frac{2}{r}\right)\sin\theta. \end{aligned}$$

← $\dfrac{1}{\cos\theta+i\sin\theta}$
$=\dfrac{\cos\theta-i\sin\theta}{(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta-i\sin\theta)}$
$=\dfrac{\cos\theta-i\sin\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$
$=\cos\theta-i\sin\theta.$
ド・モアブルの定理を用いて求めてもよい．
$(\cos\theta+i\sin\theta)^{-1}$
$=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)$
$=\cos\theta-i\sin\theta.$

一方，$w=x+yi$ であり，x，y，$\left(r+\dfrac{2}{r}\right)\cos\theta$，$\left(r-\dfrac{2}{r}\right)\sin\theta$ は実数であるから，

$$x=\left(r+\frac{2}{r}\right)\cos\theta,\qquad y=\left(r-\frac{2}{r}\right)\sin\theta. \qquad \cdots①$$

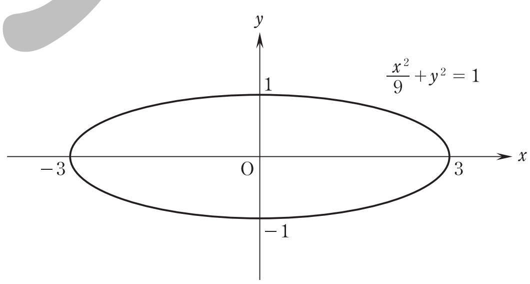
したがって，$\boxed{\text{ア}}$ には $\boxed{①}$ が，$\boxed{\text{イ}}$ には $\boxed{②}$ がそれぞれ当てはまる．

(1)　点 z が原点を中心とする半径 2 の円周上を動くとき，$r=\overset{\text{ウ}}{\boxed{2}}$ であり，これを ① に代入すると，

$$x=3\cos\theta,\qquad y=\sin\theta. \qquad \cdots②$$

xy 平面上において，座標が ② で表される点 $(x,\ y)$ の軌跡は，楕円 $\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$ である．

← ②より，
$\cos\theta=\dfrac{x}{3},\qquad \sin\theta=y.$
これを $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ に代入すると，
$\dfrac{x^2}{9}+y^2=1.$
逆に，これを満たすどの $(x,\ y)$ に対しても ② を満たす実数 θ は存在する．



したがって，$\boxed{\text{エ}}$ には $\boxed{⓪}$ が当てはまる．

(2)　$\theta=-\dfrac{\pi}{4}$ を ① に代入すると，

$$x=\left(r+\frac{2}{r}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right),\qquad y=\left(r-\frac{2}{r}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

すなわち，

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(r+\frac{2}{r}\right),\qquad y=-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(r-\frac{2}{r}\right) \qquad \cdots ③$$

であるから，

$$x-y=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(r+\frac{2}{r}\right)-\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(r-\frac{2}{r}\right)\right\}$$

$$=\sqrt{\underset{\text{オ}}{\boxed{2}}}\,r, \qquad \cdots ④$$

$$x+y=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(r+\frac{2}{r}\right)+\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(r-\frac{2}{r}\right)\right\}$$

$$=\frac{\underset{\text{カ}}{\boxed{2}}\sqrt{\underset{\text{キ}}{\boxed{2}}}}{r}. \qquad \cdots ⑤$$

④ より，

$$r=\frac{x-y}{\sqrt{2}} \qquad \cdots ④'$$

であり，さらに，$r>0$ であるから，

$$\frac{x-y}{\sqrt{2}}>0.$$

よって

$$y<x. \qquad \cdots ⑥$$

また，④′ を ⑤ に代入すると，

$$x+y=\frac{2\sqrt{2}}{\frac{x-y}{\sqrt{2}}}\quad \left(=\frac{4}{x-y}\right).$$

両辺に $x-y$ を掛けて

$$(x+y)(x-y)=4 \qquad \text{つまり} \qquad x^2-y^2=4.$$

したがって

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1. \qquad \cdots ⑦$$

⑥，⑦ より，xy 平面上において，③ で表される点 $(x,\ y)$ の軌跡は，双曲線 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$ の $y<x$ を満たす部分である．

← $r>0$ であることに注意しよう．
⑤ と $r>0$ から

$$x+y>0$$

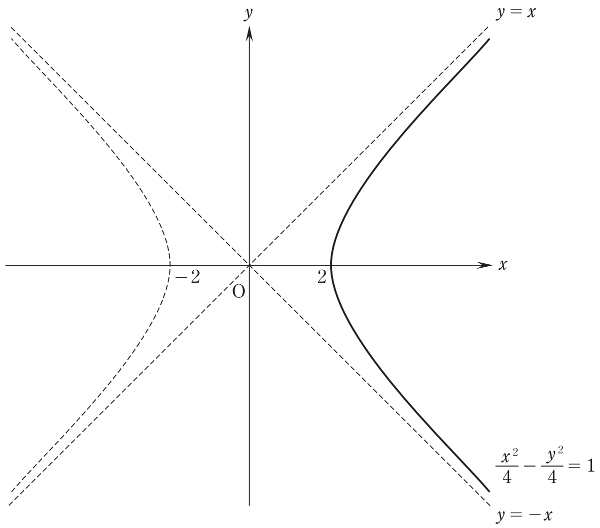
を導いて，⑥ の代わりに用いてもよい．

← ④，⑤ の辺々を掛けると，

$$(x-y)(x+y)=\sqrt{2}\,r\cdot\frac{2\sqrt{2}}{r}.$$

このようにして，$x^2-y^2=4$ を得ることもできる．

← ⑥，⑦ を満たすどの $(x,\ y)$ に対しても，④′ により，④，⑤ を満たす正の数 r は存在する．



したがって，$\boxed{\text{ク}}$ には $\boxed{④}$ が当てはまる．

← 双曲線 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$ の漸近線は，直線 $y=x$ と直線 $y=-x$ である．