2026
共通テスト
直前対策問題集

第9回

数学Ⅱ，数学B，数学C

100点／70分

第9回

（注）この科目には，選択問題があります。

第１問　（必答問題）（配点　15）

k を実数の定数とし，θ の方程式

$$2\cos^2\theta-(2k-1)\cos\theta-k=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

を考える。

$(*)$ の左辺は

$$2\cos^2\theta-(2k-1)\cos\theta-k=\left(\boxed{\text{ア}}\cos\theta+\boxed{\text{イ}}\right)(\cos\theta-k)$$

と変形することができる。

(1)　$k=1$ のとき，$0\leqq\theta<2\pi$ における $(*)$ の解は

$$\theta=\boxed{\text{ウ}},\ \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\pi,\ \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\pi$$

である。ただし，$\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}<\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ とする。

(2)　$0\leqq\theta<2\pi$ において $(*)$ を満たす θ の個数が 4 であるような k の値の範囲は

$$\boxed{\text{クケ}}<k<\frac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}},\quad \frac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}}<k<\boxed{\text{ス}}$$

である。

（数学Ⅱ，数学B，数学C 第１問 は次ページに続く。）

(3)　k は(2)で求めた範囲にあるとする。また，正の数 α は次の条件を満たしているとする。

条件

$0 \leqq \theta < \alpha$ において(*)を満たす θ の個数が 3 である。

$\boxed{クケ} < k < \dfrac{\boxed{コサ}}{\boxed{シ}}$ のとき，$\sin\alpha$ のとり得る値の範囲は

$$\frac{\boxed{セ}\sqrt{\boxed{ソ}}}{\boxed{タ}} \leqq \sin\alpha < -\sqrt{\boxed{チ} - k^2}$$

である。

また，$\sin\alpha$ のとり得る値の範囲が $-1 \leqq \sin\alpha < -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となるような k の値の範囲は $\boxed{ツ}$ である。

$\boxed{ツ}$ の解答群

⓪ $-\dfrac{1}{2} < k < 0$	① $-\dfrac{1}{2} < k \leqq 0$	② $-\dfrac{1}{2} \leqq k < 0$
③ $0 < k < \dfrac{1}{2}$	④ $0 < k \leqq \dfrac{1}{2}$	⑤ $0 \leqq k < \dfrac{1}{2}$
⑥ $0 < k < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$	⑦ $0 < k \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$	⑧ $0 \leqq k < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

第２問 （必答問題） （配点　15）

以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて６，７ページの常用対数表を用いてもよい。

右の図は座標平面上で三つの曲線

$$y=2^x,\quad y=5^x,\quad y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$$

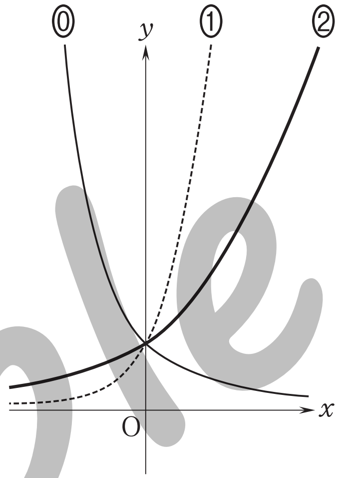
の位置関係を表したものである。グラフは正確とは限らない。この三つの曲線のうち

$y=2^x$ を表す曲線は $\boxed{\text{ア}}$

$y=5^x$ を表す曲線は $\boxed{\text{イ}}$

$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ を表す曲線は $\boxed{\text{ウ}}$

である。



$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{ウ}}$ については，最も適当なものを，上の図の ⓪ ～ ② のうちから一つずつ選べ。

$k>0$ とする。座標平面上で

直線 $y=k$ と曲線 $y=2^x$ の交点を A

直線 $y=k$ と曲線 $y=5^x$ の交点を B

直線 $y=k$ と曲線 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ の交点を C

とする。

（数学Ⅱ，数学B，数学C 第２問 は次ページに続く。）

(1)　$k=5$ のとき，二つの線分 AB，BC の長さの大小は $\boxed{\text{エ}}$ となる。

$k>1$ を満たして k の値が変化するとき，二つの線分 AB，BC の長さの大小は $\boxed{\text{オ}}$。

また，$0<k<1$ を満たして k の値が変化するとき，二つの線分 AB，BC の長さの大小は $\boxed{\text{カ}}$。

$\boxed{\text{エ}}$ の解答群

⓪　AB $<$ BC	①　AB $=$ BC	②　AB $>$ BC

$\boxed{\text{オ}}$，$\boxed{\text{カ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪　k の値にかかわらず AB $<$ BC である
①　k の値にかかわらず AB $=$ BC である
②　k の値にかかわらず AB $>$ BC である
③　k の値によって変化する

(2)　線分 AB の中点を P とする。$k>0$ を満たして k の値が変化するとき，点 P の軌跡を方程式

$$y=a^x$$

で表すことができる。ただし，$k=1$ のとき P(0, 1) とする。

このの a の値をその小数第 2 位を四捨五入して表すと $\boxed{\text{キ}}.\boxed{\text{ク}}$ となる。

（数学Ⅱ，数学B，数学C 第 2 問 は次ページに続く。）

常用対数表

数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	0.0000	0.0043	0.0086	0.0128	0.0170	0.0212	0.0253	0.0294	0.0334	0.0374
1.1	0.0414	0.0453	0.0492	0.0531	0.0569	0.0607	0.0645	0.0682	0.0719	0.0755
1.2	0.0792	0.0828	0.0864	0.0899	0.0934	0.0969	0.1004	0.1038	0.1072	0.1106
1.3	0.1139	0.1173	0.1206	0.1239	0.1271	0.1303	0.1335	0.1367	0.1399	0.1430
1.4	0.1461	0.1492	0.1523	0.1553	0.1584	0.1614	0.1644	0.1673	0.1703	0.1732
1.5	0.1761	0.1790	0.1818	0.1847	0.1875	0.1903	0.1931	0.1959	0.1987	0.2014
1.6	0.2041	0.2068	0.2095	0.2122	0.2148	0.2175	0.2201	0.2227	0.2253	0.2279
1.7	0.2304	0.2330	0.2355	0.2380	0.2405	0.2430	0.2455	0.2480	0.2504	0.2529
1.8	0.2553	0.2577	0.2601	0.2625	0.2648	0.2672	0.2695	0.2718	0.2742	0.2765
1.9	0.2788	0.2810	0.2833	0.2856	0.2878	0.2900	0.2923	0.2945	0.2967	0.2989
2.0	0.3010	0.3032	0.3054	0.3075	0.3096	0.3118	0.3139	0.3160	0.3181	0.3201
2.1	0.3222	0.3243	0.3263	0.3284	0.3304	0.3324	0.3345	0.3365	0.3385	0.3404
2.2	0.3424	0.3444	0.3464	0.3483	0.3502	0.3522	0.3541	0.3560	0.3579	0.3598
2.3	0.3617	0.3636	0.3655	0.3674	0.3692	0.3711	0.3729	0.3747	0.3766	0.3784
2.4	0.3802	0.3820	0.3838	0.3856	0.3874	0.3892	0.3909	0.3927	0.3945	0.3962
2.5	0.3979	0.3997	0.4014	0.4031	0.4048	0.4065	0.4082	0.4099	0.4116	0.4133
2.6	0.4150	0.4166	0.4183	0.4200	0.4216	0.4232	0.4249	0.4265	0.4281	0.4298
2.7	0.4314	0.4330	0.4346	0.4362	0.4378	0.4393	0.4409	0.4425	0.4440	0.4456
2.8	0.4472	0.4487	0.4502	0.4518	0.4533	0.4548	0.4564	0.4579	0.4594	0.4609
2.9	0.4624	0.4639	0.4654	0.4669	0.4683	0.4698	0.4713	0.4728	0.4742	0.4757
3.0	0.4771	0.4786	0.4800	0.4814	0.4829	0.4843	0.4857	0.4871	0.4886	0.4900
3.1	0.4914	0.4928	0.4942	0.4955	0.4969	0.4983	0.4997	0.5011	0.5024	0.5038
3.2	0.5051	0.5065	0.5079	0.5092	0.5105	0.5119	0.5132	0.5145	0.5159	0.5172
3.3	0.5185	0.5198	0.5211	0.5224	0.5237	0.5250	0.5263	0.5276	0.5289	0.5302
3.4	0.5315	0.5328	0.5340	0.5353	0.5366	0.5378	0.5391	0.5403	0.5416	0.5428
3.5	0.5441	0.5453	0.5465	0.5478	0.5490	0.5502	0.5514	0.5527	0.5539	0.5551
3.6	0.5563	0.5575	0.5587	0.5599	0.5611	0.5623	0.5635	0.5647	0.5658	0.5670
3.7	0.5682	0.5694	0.5705	0.5717	0.5729	0.5740	0.5752	0.5763	0.5775	0.5786
3.8	0.5798	0.5809	0.5821	0.5832	0.5843	0.5855	0.5866	0.5877	0.5888	0.5899
3.9	0.5911	0.5922	0.5933	0.5944	0.5955	0.5966	0.5977	0.5988	0.5999	0.6010
4.0	0.6021	0.6031	0.6042	0.6053	0.6064	0.6075	0.6085	0.6096	0.6107	0.6117
4.1	0.6128	0.6138	0.6149	0.6160	0.6170	0.6180	0.6191	0.6201	0.6212	0.6222
4.2	0.6232	0.6243	0.6253	0.6263	0.6274	0.6284	0.6294	0.6304	0.6314	0.6325
4.3	0.6335	0.6345	0.6355	0.6365	0.6375	0.6385	0.6395	0.6405	0.6415	0.6425
4.4	0.6435	0.6444	0.6454	0.6464	0.6474	0.6484	0.6493	0.6503	0.6513	0.6522
4.5	0.6532	0.6542	0.6551	0.6561	0.6571	0.6580	0.6590	0.6599	0.6609	0.6618
4.6	0.6628	0.6637	0.6646	0.6656	0.6665	0.6675	0.6684	0.6693	0.6702	0.6712
4.7	0.6721	0.6730	0.6739	0.6749	0.6758	0.6767	0.6776	0.6785	0.6794	0.6803
4.8	0.6812	0.6821	0.6830	0.6839	0.6848	0.6857	0.6866	0.6875	0.6884	0.6893
4.9	0.6902	0.6911	0.6920	0.6928	0.6937	0.6946	0.6955	0.6964	0.6972	0.6981
5.0	0.6990	0.6998	0.7007	0.7016	0.7024	0.7033	0.7042	0.7050	0.7059	0.7067
5.1	0.7076	0.7084	0.7093	0.7101	0.7110	0.7118	0.7126	0.7135	0.7143	0.7152
5.2	0.7160	0.7168	0.7177	0.7185	0.7193	0.7202	0.7210	0.7218	0.7226	0.7235
5.3	0.7243	0.7251	0.7259	0.7267	0.7275	0.7284	0.7292	0.7300	0.7308	0.7316
5.4	0.7324	0.7332	0.7340	0.7348	0.7356	0.7364	0.7372	0.7380	0.7388	0.7396

（数学Ⅱ，数学B，数学C 第２問 は次ページに続く。）

数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	0.7404	0.7412	0.7419	0.7427	0.7435	0.7443	0.7451	0.7459	0.7466	0.7474
5.6	0.7482	0.7490	0.7497	0.7505	0.7513	0.7520	0.7528	0.7536	0.7543	0.7551
5.7	0.7559	0.7566	0.7574	0.7582	0.7589	0.7597	0.7604	0.7612	0.7619	0.7627
5.8	0.7634	0.7642	0.7649	0.7657	0.7664	0.7672	0.7679	0.7686	0.7694	0.7701
5.9	0.7709	0.7716	0.7723	0.7731	0.7738	0.7745	0.7752	0.7760	0.7767	0.7774
6.0	0.7782	0.7789	0.7796	0.7803	0.7810	0.7818	0.7825	0.7832	0.7839	0.7846
6.1	0.7853	0.7860	0.7868	0.7875	0.7882	0.7889	0.7896	0.7903	0.7910	0.7917
6.2	0.7924	0.7931	0.7938	0.7945	0.7952	0.7959	0.7966	0.7973	0.7980	0.7987
6.3	0.7993	0.8000	0.8007	0.8014	0.8021	0.8028	0.8035	0.8041	0.8048	0.8055
6.4	0.8062	0.8069	0.8075	0.8082	0.8089	0.8096	0.8102	0.8109	0.8116	0.8122
6.5	0.8129	0.8136	0.8142	0.8149	0.8156	0.8162	0.8169	0.8176	0.8182	0.8189
6.6	0.8195	0.8202	0.8209	0.8215	0.8222	0.8228	0.8235	0.8241	0.8248	0.8254
6.7	0.8261	0.8267	0.8274	0.8280	0.8287	0.8293	0.8299	0.8306	0.8312	0.8319
6.8	0.8325	0.8331	0.8338	0.8344	0.8351	0.8357	0.8363	0.8370	0.8376	0.8382
6.9	0.8388	0.8395	0.8401	0.8407	0.8414	0.8420	0.8426	0.8432	0.8439	0.8445
7.0	0.8451	0.8457	0.8463	0.8470	0.8476	0.8482	0.8488	0.8494	0.8500	0.8506
7.1	0.8513	0.8519	0.8525	0.8531	0.8537	0.8543	0.8549	0.8555	0.8561	0.8567
7.2	0.8573	0.8579	0.8585	0.8591	0.8597	0.8603	0.8609	0.8615	0.8621	0.8627
7.3	0.8633	0.8639	0.8645	0.8651	0.8657	0.8663	0.8669	0.8675	0.8681	0.8686
7.4	0.8692	0.8698	0.8704	0.8710	0.8716	0.8722	0.8727	0.8733	0.8739	0.8745
7.5	0.8751	0.8756	0.8762	0.8768	0.8774	0.8779	0.8785	0.8791	0.8797	0.8802
7.6	0.8808	0.8814	0.8820	0.8825	0.8831	0.8837	0.8842	0.8848	0.8854	0.8859
7.7	0.8865	0.8871	0.8876	0.8882	0.8887	0.8893	0.8899	0.8904	0.8910	0.8915
7.8	0.8921	0.8927	0.8932	0.8938	0.8943	0.8949	0.8954	0.8960	0.8965	0.8971
7.9	0.8976	0.8982	0.8987	0.8993	0.8998	0.9004	0.9009	0.9015	0.9020	0.9025
8.0	0.9031	0.9036	0.9042	0.9047	0.9053	0.9058	0.9063	0.9069	0.9074	0.9079
8.1	0.9085	0.9090	0.9096	0.9101	0.9106	0.9112	0.9117	0.9122	0.9128	0.9133
8.2	0.9138	0.9143	0.9149	0.9154	0.9159	0.9165	0.9170	0.9175	0.9180	0.9186
8.3	0.9191	0.9196	0.9201	0.9206	0.9212	0.9217	0.9222	0.9227	0.9232	0.9238
8.4	0.9243	0.9248	0.9253	0.9258	0.9263	0.9269	0.9274	0.9279	0.9284	0.9289
8.5	0.9294	0.9299	0.9304	0.9309	0.9315	0.9320	0.9325	0.9330	0.9335	0.9340
8.6	0.9345	0.9350	0.9355	0.9360	0.9365	0.9370	0.9375	0.9380	0.9385	0.9390
8.7	0.9395	0.9400	0.9405	0.9410	0.9415	0.9420	0.9425	0.9430	0.9435	0.9440
8.8	0.9445	0.9450	0.9455	0.9460	0.9465	0.9469	0.9474	0.9479	0.9484	0.9489
8.9	0.9494	0.9499	0.9504	0.9509	0.9513	0.9518	0.9523	0.9528	0.9533	0.9538
9.0	0.9542	0.9547	0.9552	0.9557	0.9562	0.9566	0.9571	0.9576	0.9581	0.9586
9.1	0.9590	0.9595	0.9600	0.9605	0.9609	0.9614	0.9619	0.9624	0.9628	0.9633
9.2	0.9638	0.9643	0.9647	0.9652	0.9657	0.9661	0.9666	0.9671	0.9675	0.9680
9.3	0.9685	0.9689	0.9694	0.9699	0.9703	0.9708	0.9713	0.9717	0.9722	0.9727
9.4	0.9731	0.9736	0.9741	0.9745	0.9750	0.9754	0.9759	0.9763	0.9768	0.9773
9.5	0.9777	0.9782	0.9786	0.9791	0.9795	0.9800	0.9805	0.9809	0.9814	0.9818
9.6	0.9823	0.9827	0.9832	0.9836	0.9841	0.9845	0.9850	0.9854	0.9859	0.9863
9.7	0.9868	0.9872	0.9877	0.9881	0.9886	0.9890	0.9894	0.9899	0.9903	0.9908
9.8	0.9912	0.9917	0.9921	0.9926	0.9930	0.9934	0.9939	0.9943	0.9948	0.9952
9.9	0.9956	0.9961	0.9965	0.9969	0.9974	0.9978	0.9983	0.9987	0.9991	0.9996

第 3 問 （必答問題） （配点　22）

$f(x)$ は 3 次関数である。座標平面において $y=f(x)$ のグラフは点 $(1,\ 0)$ を通り，さらにこの点に関して対称である。また，$f(x)$ は $x=0$ で極小値をとる。

$f(1)=\boxed{\text{ア}}$，$f'(0)=\boxed{\text{イ}}$ である。

また，2 点 $(0,\ f(0))$ と $\left(\boxed{\text{ウ}},\ f\left(\boxed{\text{ウ}}\right)\right)$ は点 $(1,\ 0)$ に関して対称なので

$$\frac{f(0)+f\left(\boxed{\text{ウ}}\right)}{2}=\boxed{\text{エ}}$$

が成り立つ。

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ （a，b，c，d は実数で $a \neq 0$）とすると

$$b=\boxed{\text{オカ}}\,a,\quad c=\boxed{\text{キ}},\quad d=\boxed{\text{ク}}\,a$$

であり，$f(x)$ は a を用いて

$$f(x)=a(x-1)\left(x^2-\boxed{\text{ケ}}\,x-\boxed{\text{コ}}\right)$$

と表せる。また，$a\,\boxed{\text{サ}}\,0$ である。

$\boxed{\text{サ}}$ の解答群

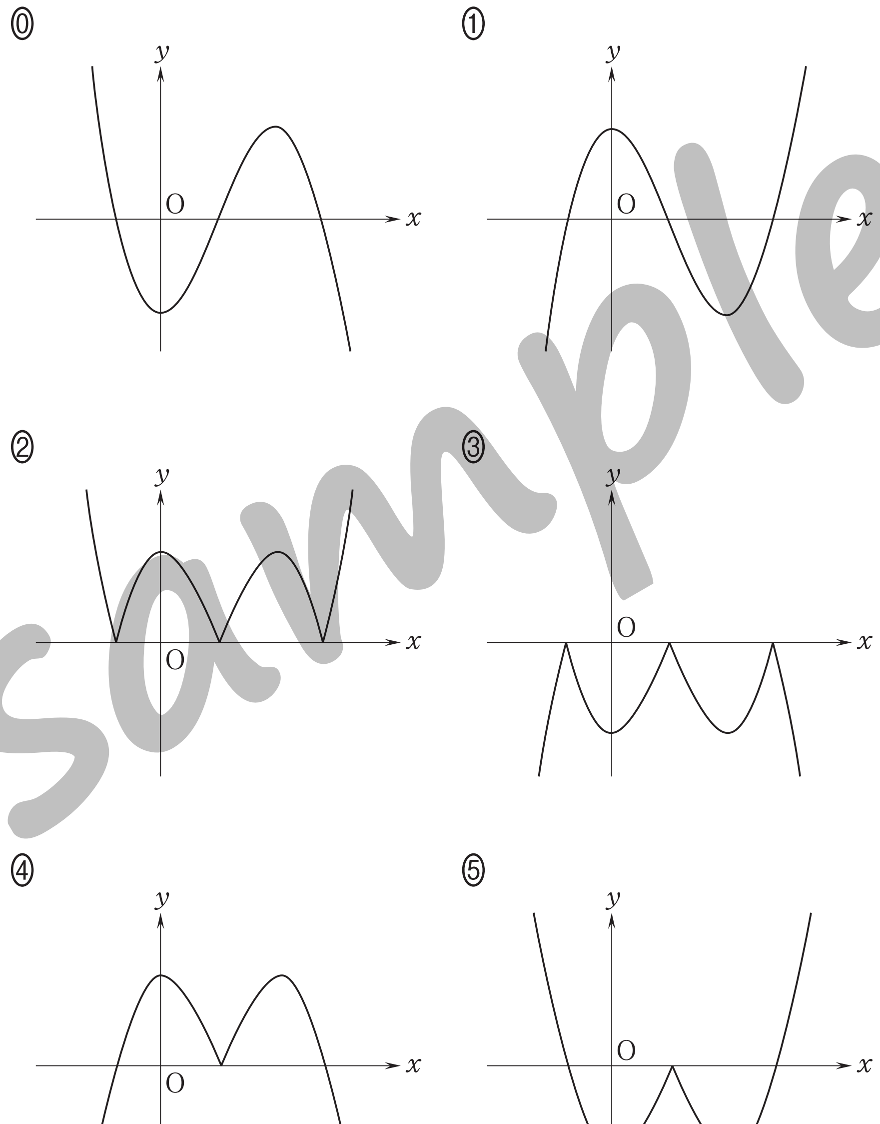
⓪ $>$	① $<$

（数学Ⅱ，数学B，数学C 第 3 問 は次ページに続く。）

$g(x)=a|x-1|\left(x^2-\boxed{\text{ケ}}\,x-\boxed{\text{コ}}\right)$ とする。

$y=g(x)$ のグラフの概形は $\boxed{\text{シ}}$ である。

$\boxed{\text{シ}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪～⑤ のうちから一つ選べ。



（数学Ⅱ，数学B，数学C 第３問 は次ページに続く。）

(1) $f(x)$ の極小値が -2 のとき，$g(x)$ の極大値は $\boxed{\text{ス}}$。また，$g(x) \leqq 0$ となる x の条件は $\boxed{\text{セ}}$ である。

$\boxed{\text{ス}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2
③ $1-\sqrt{3}$	④ $1+\sqrt{3}$	⑤ 存在しない

$\boxed{\text{セ}}$ の解答群

⓪ 「x は任意の実数」	① $x=1,\ 1\pm\sqrt{3}$
② $x \leqq 1$	③ $1-\sqrt{3} \leqq x \leqq 1,\ 1+\sqrt{3} \leqq x$
④ $x \leqq 1-\sqrt{3},\ 1 \leqq x \leqq 1+\sqrt{3}$	⑤ $1-\sqrt{3} \leqq x \leqq 1+\sqrt{3}$
⑥ $x \leqq 1-\sqrt{3},\ x=1,\ 1+\sqrt{3} \leqq x$	

(2) $x \geqq 0$ とし

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt, \quad G(x)=\int_0^x g(t)\,dt$$

とする。

$0 \leqq x \leqq 1$ のとき，$F(x)+G(x)$ の値は $\boxed{\text{ソ}}$。

$1 \leqq x$ とする。$F(x)+G(x)$ の値は $x=\boxed{\text{タ}}+\sqrt{\boxed{\text{チ}}}$ のとき最大となる。

$\boxed{\text{ソ}}$ の解答群

⓪ x の値にかかわらず 0 である
① x の値にかかわらず 1 である
② x の値が増加すれば増加する
③ x の値が増加すれば減少する

（下 書 き 用 紙）

数学Ⅱ，数学Ｂ，数学Ｃの試験問題は次に続く。

第 4 問〜第 7 問は，**いずれか 3 問を選択**し，解答しなさい。

第 4 問 （選択問題） （配点　16）

$a_1=3$ であり，すべての自然数 n に対して

$$a_{n+1}=2a_n+1$$

を満たす数列 $\{a_n\}$ がある。

$a_2=7$，$a_3=15$ であり $a_5=\boxed{\text{アイ}}$ である。また，数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=2^{\boxed{\text{ウ}}}-\boxed{\text{エ}} \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

と表される。

$\boxed{\text{ウ}}$ の解答群

⓪ $n-2$	① $n-1$	② n	③ $n+1$	④ $n+2$

この数列 $\{a_n\}$ を利用して，次のように数を並べる。

まず，初項が 1，末項が a_1，公差が 2 の等差数列を作り，それを 1 行目とする。次に，初項が 1，末項が a_2，公差が 2 の等差数列を作り，それを 2 行目とする。同様に，自然数 k に対して，初項が 1，末項が a_k，公差が 2 の等差数列を作り，それを k 行目とする。

この数の並びの 1 行目，2 行目，3 行目は次のようになる。

（1 行目） 1，3，
（2 行目） 1，3，5，7，
（3 行目） 1，3，5，7，9，11，13，15，
　⋮　　　　⋮

（数学Ⅱ，数学B，数学C 第 4 問 は次ページに続く。）

(1)　この数の並びの 4 行目には全部で $\boxed{\text{オカ}}$ 個の数が並び，それらの和は $\boxed{\text{キクケ}}$ である。

n を自然数とする。この数の並びの 1 行目から n 行目に並んでいる数を全部加えた和は

$$\frac{\boxed{\text{コ}}^{\boxed{\boxed{\text{サ}}}}-\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$$

である。

$\boxed{\boxed{\text{サ}}}$ の解答群

⓪　$n-2$	①　$n-1$	②　n	③　$n+1$	④　$n+2$

(2)　この数の並びを 1 行目から順に見ていくとき，はじめて現れる 4 桁の整数は 1001 であり，それは

$\boxed{\text{セ}}$ 行目の $\boxed{\text{ソタチ}}$ 番目

にある。

第４問～第７問は，**いずれか３問を選択**し，解答しなさい。

第５問 （選択問題） （配点　16）

以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて 17 ページの正規分布表を用いてもよい。

座標平面上の点Ｐを次のような試行を繰り返して移動させる。

二つのサイコロＡ，Ｂを同時に振って，

二つとも１の目が出たら　x 軸方向に $+1$，y 軸方向に $+1$ だけ移動させ，

Ａに１の目，Ｂに１以外の目が出たら　x 軸方向に $+1$ だけ移動させ，

Ａに１以外の目，Ｂに１の目が出たら　y 軸方向に $+1$ だけ移動させる。

ただし，二つとも１以外の目が出たら　Ｐを動かさない。

以上を１回の試行とする。

Ｐは初め原点にあるとする。

例えば，この試行を何回か繰り返して，サイコロＡに関して１の目が x 回，サイコロＢに関して１の目が y 回出たとき，Ｐの座標は $(x,\ y)$ となる。

(1)　この試行を３回繰り返す。

Ｐの x 座標が２である確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}}$ であり，Ｐの y 座標が１である確率は $\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カキ}}}$ である。よって，Ｐの座標が $(2,\ 1)$ である確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}} \times \dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カキ}}}$ である。

（数学Ⅱ，数学Ｂ，数学Ｃ 第５問 は次ページに続く。）

(2) この試行を720回繰り返したとき，Pの x 座標を X とする。

確率変数 X の平均(期待値)は $\boxed{\text{クケコ}}$，標準偏差は $\boxed{\text{サシ}}$ である。ここで，試行回数720は十分に大きいと考えられるので，$Z=\dfrac{X-\boxed{\text{スセソ}}}{\boxed{\text{タチ}}}$ とおけば Z は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

これより，Pの x 座標が $100 \leqq X \leqq 130$ である確率は

$$P(100 \leqq X \leqq 130)=0.\boxed{\text{ツテト}}$$

である。

この試行を720回繰り返したとき，$\mathrm{P}(x,\ y)$ が $100 \leqq x \leqq 130$ かつ $120 \leqq y \leqq 140$ を満たす長方形の周上または内部にある確率は $0.\boxed{\text{ナニヌ}}$ である。

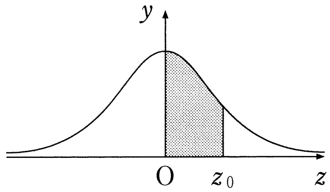
（数学Ⅱ，数学B，数学C 第5問 は 17ページに続く。）

（下 書 き 用 紙）

数学Ⅱ，数学Ｂ，数学Ｃの試験問題は次に続く。

正 規 分 布 表

次の表は，標準正規分布の分布曲線における右図の灰色部分の面積の値をまとめたものである。



z_0	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.5	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998

第４問～第７問は，**いずれか３問を選択**し，解答しなさい。

第６問 （選択問題） （配点　16）

三角形ABCにおいて辺ABを $p:(1-p)$ に外分する点をＰとし，辺CAを $q:(1-q)$ に外分する点をQ，辺BCを1:2に外分する点をＲとする。ただし，p，q は $0<p<1$，$0<q<1$，$p \neq \dfrac{1}{2}$，$q \neq \dfrac{1}{2}$ を満たす実数とする。

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ をそれぞれ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$p$，$q$ を用いて表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\boxed{\text{ア}}\,\overrightarrow{\mathrm{AB}},\quad \overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\boxed{\text{イ}}\,\overrightarrow{\mathrm{AC}},\quad \overrightarrow{\mathrm{AR}}=\boxed{\text{ウ}}\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

となる。

$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{p}{2p-1}$	① $\dfrac{1-p}{2p-1}$	② $\dfrac{p}{1-2p}$	③ $\dfrac{1-p}{1-2p}$
④ $\dfrac{q}{2q-1}$	⑤ $\dfrac{1-q}{2q-1}$	⑥ $\dfrac{q}{1-2q}$	⑦ $\dfrac{1-q}{1-2q}$

(1)　３点Ｐ，Q，Ｒが同一直線上にあるとする。このとき，適当な実数 k を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=k\,\overrightarrow{\mathrm{RP}}$$

と表せる。

このとき，p，q は $\boxed{\text{エ}}$ を満たす。

$\boxed{\text{エ}}$ の解答群

⓪ $pq-p-q+1=0$	① $pq+p+q-1=0$
② $pq-2p-2q+2=0$	③ $pq+2p+2q-2=0$
④ $pq-3p-3q+3=0$	⑤ $pq+3p+3q-3=0$

（数学Ⅱ，数学Ｂ，数学Ｃ 第６問 は次ページに続く。）

(2)　三角形 ABC の重心を G_1，三角形 PQR の重心を G_2 とする。

$$\overrightarrow{AG_1}=\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\overrightarrow{AB}+\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\overrightarrow{AC}$$

であり，G_1 と G_2 が一致するとき

$$p=\frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}},\quad q=\frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}$$

である。

さらに，$\left|\overrightarrow{AB}\right|=2$，$\left|\overrightarrow{AC}\right|=3$，$\left|\overrightarrow{AG_1}\right|=1$ であるとする。

このとき

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\boxed{スセ}$$

であり，三角形 PQR の面積は $\boxed{ソタ}\sqrt{\boxed{チ}}$ となる。

第４問～第７問は，**いずれか３問を選択**し，解答しなさい。

第７問 （選択問題） （配点　16）

座標平面上で

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad(a>b>0)$$

の表す楕円 E について考える。ただし，a，b は定数である。

E の二つの焦点は $\mathrm{F}\left(\boxed{\text{ア}},\ 0\right)$，$\mathrm{F}'\left(-\boxed{\text{ア}},\ 0\right)$ であり，E 上の任意の点 P に対して

$$\mathrm{FP}+\mathrm{F'P}=\boxed{\text{イ}}$$

が成り立つ。

$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ a	① $2a$	② a^2+b^2	③ $\sqrt{a^2+b^2}$
④ b	⑤ $2b$	⑥ a^2-b^2	⑦ $\sqrt{a^2-b^2}$

（**数学Ⅱ，数学B，数学C 第７問** は次ページに続く。）

太郎さんと花子さんは次の**問題**について考えている。

> **問題**　楕円 E 上の点 P で，線分 FP の長さを最小にする点を求めよ。

太郎：点 F を中心とする円で楕円 E と共有点をもつもののうち，半径が最も小さいものを考えてはどうだろう。

花子：そのときの円と楕円 E の共有点が**問題**の答えの点だね。次の**図 1** のような P が答えになるのかな。

太郎：次の**図 2** のようになる場合の P が答えかも知れないよ。

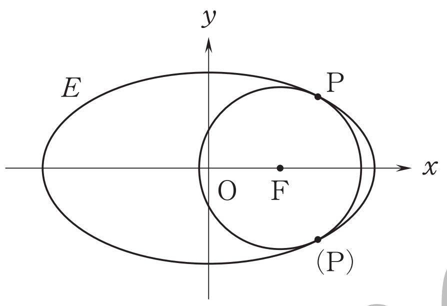


図 1

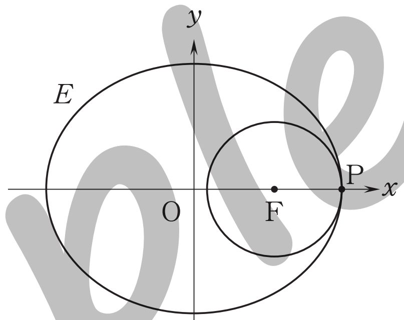


図 2

花子：円と楕円 E の位置関係を判定するのはたいへんだよ。線分 FP の長さを直接求めてはどうだろう。

(数学Ⅱ，数学B，数学C 第 7 問 は次ページに続く。)

$P(x,\ y)$ とおくと $y^2=b^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)$ が成り立つので，線分 FP の長さを x と定数 a，b を用いて表すと

FP＝ ウ

となる。このことから**問題**について エ ことがわかる。

ウ の解答群

⓪ $\sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{a^2}x^2-2ax+a^2+b^2}$	① $a-\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}x$
② $\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}x-a$	③ $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}x-a$

エ の解答群

⓪ a，b の値によって花子さんの予想(**図 1**)が正しいことも，太郎さんの予想(**図 2**)が正しいこともある
① a，b の値によらず花子さんの予想(**図 1**)が正しい
② a，b の値によらず太郎さんの予想(**図 2**)が正しい
③ a，b の値によらず線分 FP の長さの最小値は存在しない

MEMO

MEMO

MEMO

MEMO

MEMO

MEMO

2026
共通テスト
直前対策問題集

第 9 回

数学Ⅱ，数学B，数学C

第9回 数学Ⅱ，数学B，数学C　チェックシート・第1面

1

1	解答欄	配点
ア	2	3
イ	1	
ウ	0	2
エ	2	
オ	3	
カ	4	
キ	3	
ク	−	3
ケ	1	
コ	−	
サ	1	
シ	2	
ス	1	
セ	−	3
ソ	3	
タ	2	
チ	1	
ツ	5	4
テ		
ト		
ナ		
ニ		
ヌ		
ネ		
ノ		
ハ		
ヒ		
フ		
ヘ		
ホ		

2

2	解答欄	配点
ア	2	3
イ	1	
ウ	0	
エ	0	2
オ	0	3
カ	0	3
キ	2	4
ク	6	
ケ		
コ		
サ		
シ		
ス		
セ		
ソ		
タ		
チ		
ツ		
テ		
ト		
ナ		
ニ		
ヌ		
ネ		
ノ		
ハ		
ヒ		
フ		
ヘ		
ホ		

3

3	解答欄	配点
ア	0	1
イ	0	1
ウ	2	1
エ	0	1
オ	−	3
カ	3	
キ	0	
ク	2	
ケ	2	3
コ	2	
サ	1	1
シ	4	3
ス	2	1
セ	6	2
ソ	0	1
タ	1	4
チ	3	
ツ		
テ		
ト		
ナ		
ニ		
ヌ		
ネ		
ノ		
ハ		
ヒ		
フ		
ヘ		
ホ		

第9回 数学Ⅱ，数学B，数学C チェックシート・第2面

4	解答	配点
ア	6	1
イ	3	2
ウ	3	
エ	1	2
オ	1	
カ	6	3
キ	2	
ク	5	
ケ	6	
コ	4	3
サ	3	
シ	4	
ス	3	
セ	9	2
ソ	5	3
タ	0	
チ	1	

5	解答	配点
ア	5	2
イ	7	
ウ	2	
エ	2	2
オ	5	
カ	7	
キ	2	
ク	1	2
ケ	2	
コ	0	
サ	1	2
シ	0	
ス	1	2
セ	2	
ソ	0	
タ	1	
チ	0	
ツ	8	3
テ	1	
ト	9	
ナ	3	3
ニ	9	
ヌ	1	

6	解答	配点
ア	0	1
イ	7	1
ウ	2	1
エ	2	3
オ	1	1
カ	3	
キ	1	
ク	3	
ケ	1	3
コ	3	
サ	1	
シ	3	
ス	−	3
セ	2	
ソ	1	3
タ	4	
チ	2	

7	解答	配点
ア	7	4
イ	1	4
ウ	1	4
エ	2	4

【解答・採点基準】　（70分　100点満点）

問題番号(配点)	解答記号	正　解	配点	自己採点
第１問 (15)	ア$\cos\theta +$ イ	$2\cos\theta+1$	3	
	ウ，$\dfrac{エ}{オ}\pi$，$\dfrac{カ}{キ}\pi$	0，$\dfrac{2}{3}\pi$，$\dfrac{4}{3}\pi$	2	
	クケ $< k < \dfrac{コサ}{シ}$，$\dfrac{コサ}{シ} < k <$ ス	$-1 < k < \dfrac{-1}{2}$，$\dfrac{-1}{2} < k < 1$	3	
	$\dfrac{セ\sqrt{ソ}}{タ} \leqq \sin\alpha < -\sqrt{チ-k^2}$	$\dfrac{-\sqrt{3}}{2} \leqq \sin\alpha < -\sqrt{1-k^2}$	3	
	ツ	⑤	4	
		第１問　自己採点小計		
第２問 (15)	ア，イ，ウ	②，①，⓪	3	
	エ	⓪	2	
	オ	⓪	3	
	カ	⓪	3	
	キ.ク	2.6	4	
		第２問　自己採点小計		
第３問 (22)	$f(1)=$ ア	$f(1)=0$	1	
	$f'(0)=$ イ	$f'(0)=0$	1	
	(ウ，f(ウ))	$(2,\ f(2))$	1	
	$\dfrac{f(0)+f(ウ)}{2}=$ エ	$\dfrac{f(0)+f(2)}{2}=0$	1	
	$b=$ オカa，$c=$ キ，$d=$ クa	$b=-3a$，$c=0$，$d=2a$	3	
	x^2- ケ$x-$ コ	x^2-2x-2	3	
	サ	①	1	
	シ	④	3	
	ス	②	1	
	セ	⑥	2	
	ソ	⓪	1	
	$x=$ タ $+\sqrt{チ}$	$x=1+\sqrt{3}$	4	
		第３問　自己採点小計		
第４問 (16)	$a_5=$ アイ	$a_5=63$	1	
	ウ，エ	③，1	2	
	オカ 個	16 個	2	
	和は キクケ	和は 256	3	
	コ，サ，シ，ス	4，③，4，3	3	
	セ 行目	9 行目	2	
	ソタチ 番目	501 番目	3	
		第４問　自己採点小計		

問題番号(配点)	解答記号	正　解	配点	自己採点
第５問 (16)	$\dfrac{ア}{イウ}$	$\dfrac{5}{72}$	2	
	$\dfrac{エオ}{カキ}$	$\dfrac{25}{72}$	2	
	クケコ	120	2	
	サシ	10	2	
	$\dfrac{X-スセソ}{タチ}$	$\dfrac{X-120}{10}$	2	
	0.ツテト	0.819	3	
	0.ナニヌ	0.391	3	
		第５問　自己採点小計		
第６問 (16)	ア	⓪	1	
	イ	⑦	1	
	ウ$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$	$2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$	1	
	エ	②	3	
	$\dfrac{オ}{カ}\overrightarrow{AB}+\dfrac{キ}{ク}\overrightarrow{AC}$	$\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$	1	
	$p=\dfrac{ケ}{コ}$，$q=\dfrac{サ}{シ}$	$p=\dfrac{1}{3}$，$q=\dfrac{1}{3}$	3	
	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$ スセ	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-2$	3	
	面積は ソタ$\sqrt{チ}$	面積は $14\sqrt{2}$	3	
		第６問　自己採点小計		
第７問 (16)	ア	⑦	4	
	イ	①	4	
	ウ	①	4	
	エ	②	4	
		第７問　自己採点小計		
		自己採点合計		

（注）　第１問～第３問は必答。第４問～第７問のうちから３問選択。計６問を解答。

第１問　三角関数　（配点　15）

$$2\cos^2\theta-(2k-1)\cos\theta-k=0 \qquad \cdots(*)$$

の左辺は

$$2\cos^2\theta-(2k-1)\cos\theta-k=\left(\boxed{2}\cos\theta+\boxed{1}\right)(\cos\theta-k) \qquad \cdots ①$$

と変形することができる．

⑴　$k=1$ のとき，① により $(*)$ は

$$(2\cos\theta+1)(\cos\theta-1)=0$$

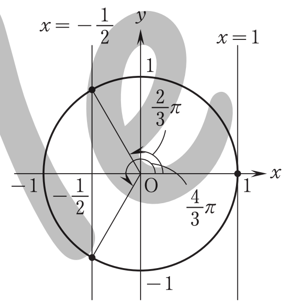
となり，これより

$$\cos\theta=-\frac{1}{2},\ 1.$$

よって，$k=1$ のとき $0\leqq\theta<2\pi$ における $(*)$ の解は

$$\theta=\boxed{0},\ \frac{\boxed{2}}{\boxed{3}}\pi,\ \frac{\boxed{4}}{\boxed{3}}\pi.$$

←



⑵　① により $(*)$ は

$$(2\cos\theta+1)(\cos\theta-k)=0$$

となり，これより

$$\cos\theta=-\frac{1}{2},\ k.$$

このことと $0\leqq\theta<2\pi$ における $\cos\theta=-\frac{1}{2}$ の解が

$$\theta=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$$

の２つであることより，$0\leqq\theta<2\pi$ において $(*)$ を満たす θ の個数が４(個)となるための条件は，$0\leqq\theta<2\pi$ において

$$\begin{cases} \cos\theta=-\frac{1}{2} \text{ と } \cos\theta=k \text{ が共通解をもたず，} \\ \text{かつ} \\ \cos\theta=k \text{ が異なる２つの解をもつ} \end{cases}$$

こと，すなわち，座標平面上において

$$\begin{cases} \text{直線 } x=-\frac{1}{2} \text{ と直線 } x=k \text{ が一致せず，} \\ \text{かつ} \\ \text{原点を中心とする半径１の円と直線 } x=k \text{ が異なる２点で交わる} \end{cases}$$

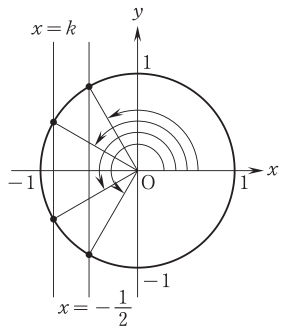
ことである．

したがって，$0\leqq\theta<2\pi$ において $(*)$ を満たす θ の個数が４(個)となるような k の値の範囲は

$$\boxed{-1}<k<\frac{\boxed{-1}}{\boxed{2}},\quad -\frac{1}{2}<k<\boxed{1}.$$

←　例えば，原点を中心とする半径１の円が２直線 $x=-\frac{1}{2}$, $x=k$ と下図のように交わるとき，$0\leqq\theta<2\pi$ において $(*)$ は異なる４つの解をもつ．

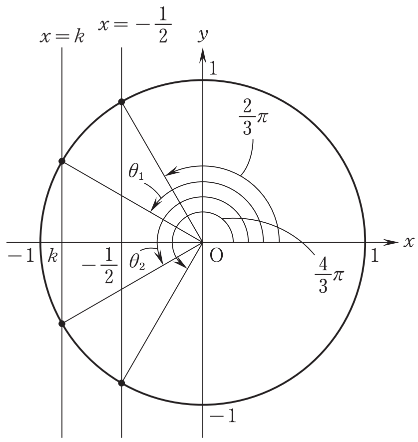
このとき，$0\leqq\theta<2\pi$ における $(*)$ の解は，下図の矢印で表された４つの角となる．



(3)　k が(2)で求めた範囲にあるとき，$0 \leqq \theta < 2\pi$ における $\cos\theta = k$ の異なる2つの解を θ_1，θ_2（ただし，$\theta_1 < \pi < \theta_2$）と表すことにする．

　$-1 < k < -\dfrac{1}{2}$ のとき，$0 \leqq \theta < 2\pi$ における(*)の解を小さい順に書くと，

$$\frac{2}{3}\pi,\ \theta_1,\ \theta_2,\ \frac{4}{3}\pi.$$



　よって，$-1 < k < -\dfrac{1}{2}$ のとき，**条件**を満たす正の数 α の範囲は

「$0 \leqq \theta < \alpha$ の範囲に $\dfrac{2}{3}\pi$，θ_1，θ_2

は含まれるが，$\dfrac{4}{3}\pi$ は含まれない」

ような α の範囲であり，そのような α の範囲は

$$\theta_2 < \alpha \leqq \frac{4}{3}\pi.$$

　この範囲で $\sin\alpha$ は単調に減少するので，$\sin\alpha$ のとり得る値の範囲は

$$\sin\frac{4}{3}\pi \leqq \sin\alpha < \sin\theta_2. \qquad \cdots ②$$

　ここで，$\cos\theta_2 = k$，$\sin\theta_2 < 0$ であることから，

$$\begin{aligned}\sin\theta_2 &= -\sqrt{1-\cos^2\theta_2}\\ &= -\sqrt{1-k^2}.\end{aligned} \qquad \cdots ③$$

　②，③および $\sin\dfrac{4}{3}\pi = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ により，$-1 < k < -\dfrac{1}{2}$ のとき $\sin\alpha$ のとり得る値の範囲は

$$\frac{\boxed{-}\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{2}} \leqq \sin\alpha < -\sqrt{\boxed{1} - k^2}.$$

　次に $\sin\alpha$ のとり得る値の範囲が $-1 \leqq \sin\alpha < -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となる場合を考える．

　上で求めた $\sin\alpha$ の範囲はこれと異なるので，$-1 < k < -\dfrac{1}{2}$ ではないこ

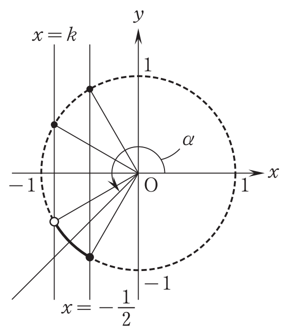
← 仮に $\alpha \geqq 2\pi$ とすると，これら4つの θ は(*)かつ $0 \leqq \theta < \alpha$ を満たすので，**条件**は成り立たない．よって $0 < \alpha < 2\pi$ である．

← $-1 < k < -\dfrac{1}{2}$ のとき，**条件**を満たす正の数 α の範囲は，角 α の動径が下図の太線部分（白丸部分を除く）を通るような α の範囲である．

　なお，$\alpha = \theta_2$ のとき，$0 \leqq \theta < \alpha$ における(*)の解は

$$\theta = \frac{2}{3}\pi,\ \theta_1$$

の2つとなり，**条件**が満たされない．これが白丸部分が除かれる理由である．

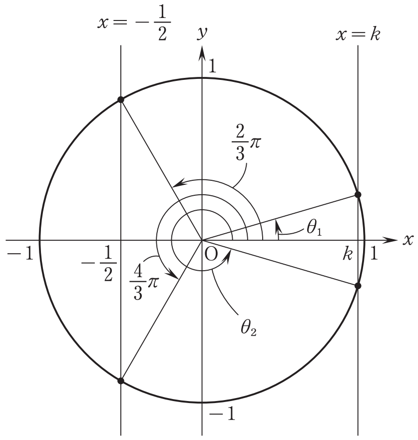


とがわかる．つまり

$$-\frac{1}{2}<k<1.$$

このとき，$0 \leqq \theta < 2\pi$ における(*)の解を小さい順に書くと，

$$\theta_1,\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi,\ \theta_2.$$



よって，$-\frac{1}{2}<k<1$ のとき，**条件**を満たす正の数 α の範囲は

「$0 \leqq \theta < \alpha$ の範囲に θ_1，$\frac{2}{3}\pi$，$\frac{4}{3}\pi$

は含まれるが，θ_2 は含まれない」

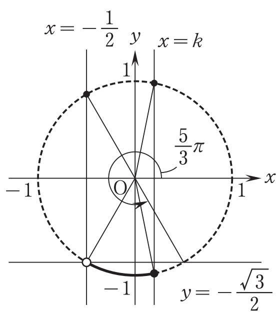
ような α の範囲であり，そのような α の範囲は

$$\frac{4}{3}\pi < \alpha \leqq \theta_2. \qquad \cdots ④$$

α の範囲が ④ であり，かつ，$\sin\alpha$ のとり得る値の範囲が

$$-1 \leqq \sin\alpha < -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

となるのは，④ が下図の太線部分で表されるような範囲になるときである．



$\sin\alpha$ の値が

$$\begin{cases} -1 \text{ となることがあり，} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 以上とはならない} \end{cases}$$

ことに注意しよう．

以上のことと $\sin\frac{3}{2}\pi=-1$，$\sin\frac{4}{3}\pi=\sin\frac{5}{3}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ により，$\sin\alpha$ のとり得る値の範囲が $-1 \leqq \sin\alpha < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ となるのは，**条件**を満たす正の数 α の範囲が ④ になり，かつ

「④ の範囲に $\frac{3}{2}\pi$ は含まれるが，$\frac{5}{3}\pi$ は含まれない」

場合である．これは

$$\frac{3}{2}\pi \leqq \theta_2 < \frac{5}{3}\pi$$

となることと同じである．

この範囲で $\cos\theta_2$ は単調に増加するので

$$\cos\frac{3}{2}\pi \leqq \cos\theta_2 < \cos\frac{5}{3}\pi.$$

$\cos\theta_2 = k$ であることと $\cos\frac{3}{2}\pi=0$，$\cos\frac{5}{3}\pi=\frac{1}{2}$ により，$\sin\alpha$ のとり得る値の範囲が $-1 \leqq \sin\alpha < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ となるような k の値の範囲は

$$0 \leqq k < \frac{1}{2}.$$

このとき $-\frac{1}{2}<k<1$ は満たされる.

したがって, $\boxed{\text{ツ}}$ には $\boxed{⑤}$ が当てはまる.

【参考】

$-\frac{1}{2}<k<1$ の範囲を

(ア) $-\frac{1}{2}<k<0$,　(イ) $0 \leqq k<\frac{1}{2}$,　(ウ) $\frac{1}{2} \leqq k<1$

に分けて, ④ を満たす α の範囲とそれに対応する $\sin\alpha$ の範囲を求めると次のようになる.

(ア) $-\frac{1}{2}<k<0$ のとき.

④ を満たす α の範囲を単位円上の弧で表すと, 右図の太線部分となり, その y 座標のとり得る値の範囲は

$$-\sqrt{1-k^2} \leqq \sin\alpha < -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

これは $-1 \leqq \sin\alpha < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ に一致しない.

(イ) $0 \leqq k<\frac{1}{2}$ のとき.

④ を満たす α の範囲は右の図のように表されるので, その y 座標のとり得る値の範囲は

$$-1 \leqq \sin\alpha < -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(ウ) $\frac{1}{2} \leqq k<1$ のとき.

④ を満たす α の範囲は右の図のように表されるので,

$$-1 \leqq \sin\alpha \leqq -\sqrt{1-k^2}.$$

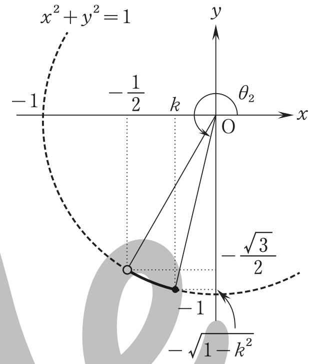
これは $-1 \leqq \sin\alpha < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ に一致しない.

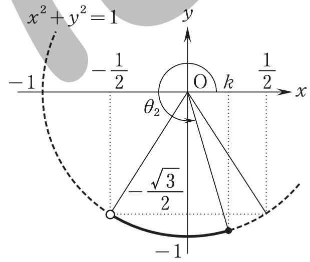
(ア), (イ), (ウ) により, $\sin\alpha$ のとり得る値の範囲が

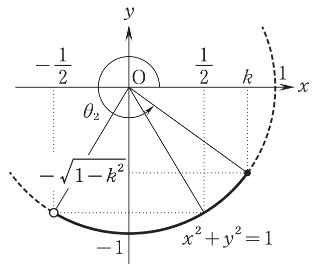
$$-1 \leqq \sin\alpha < -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

となるのは, (イ) の $0 \leqq k<\frac{1}{2}$ の場合であることがわかる.

← $k=\cos\theta_2$ である.



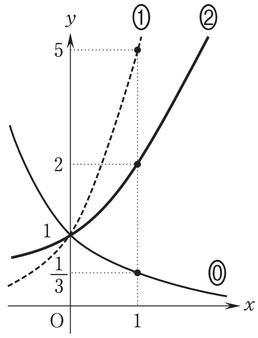




第２問　指数関数・対数関数　（配点　15）

例えば $x=1$ のとき

$$2^x=2,\quad 5^x=5,\quad \left(\frac{1}{3}\right)^x=\frac{1}{3}$$



である．これらの y 座標の大小から

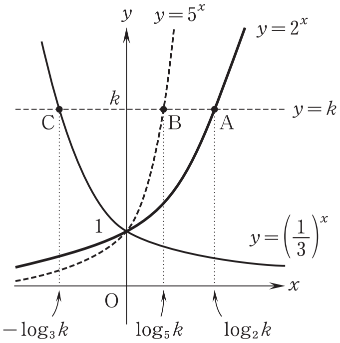
$y=2^x$ を表す曲線は $\boxed{②}$,

$y=5^x$ を表す曲線は $\boxed{①}$,

$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ を表す曲線は $\boxed{⓪}$

とわかる．

(1)



$2^x=k$ とすると　$x=\log_2 k$（A の x 座標）．

$5^x=k$ とすると　$x=\log_5 k$（B の x 座標）．

$\left(\frac{1}{3}\right)^x=k$ とすると $3^{-x}=k$ となり $-x=\log_3 k$．よって

$$x=-\log_3 k\ （\text{C の } x \text{ 座標}）.$$

← $a>0$，$a\neq 1$，$y>0$ のとき
$a^x=y$
$\iff x=\log_a y$.

したがって，$k>1$ のとき

$$\begin{cases} AB=\log_2 k-\log_5 k, \\ BC=\log_5 k-(-\log_3 k). \end{cases} \quad \cdots ①$$

底を 10 に直すと

$$AB=\frac{\log_{10} k}{\log_{10} 2}-\frac{\log_{10} k}{\log_{10} 5}=\log_{10} k\left(\frac{1}{\log_{10} 2}-\frac{1}{\log_{10} 5}\right),$$

$$BC=\frac{\log_{10} k}{\log_{10} 5}+\frac{\log_{10} k}{\log_{10} 3}=\log_{10} k\left(\frac{1}{\log_{10} 5}+\frac{1}{\log_{10} 3}\right).$$

← $\log_x y=\dfrac{\log_a y}{\log_a x}$.
ただし，a と x は 1 でない正の数，$y>0$.

したがって，$k>1$ のとき

$$AB-BC=\log_{10} k\left(\frac{1}{\log_{10} 2}-\frac{1}{\log_{10} 3}-\frac{2}{\log_{10} 5}\right). \quad \cdots ②$$

$k=5$ とすると

$$AB-BC=\frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 2}-\frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 3}-2.$$

← $k=5$ のとき
$AB-BC$
$=\log_2 5-\log_3 5-2$
$<\log_2 8-\log_3 3-2$
$=3-1-2=0$
としてもよい．

常用対数表を用いると

$$AB-BC=\frac{0.6990}{0.3010}-\left(\frac{0.6990}{0.4771}+2\right)$$

を得る．ここで

$$\begin{cases} \dfrac{0.6990}{0.3010} < \dfrac{0.9030}{0.3010} = 3, \\ \dfrac{0.6990}{0.4771} + 2 > \dfrac{0.4771}{0.4771} + 2 = 3 \end{cases}$$

であるので，$k=5$ のとき $\mathrm{AB}-\mathrm{BC}<0$．よって

$$\mathrm{AB}<\mathrm{BC}$$

となり，$\boxed{エ}$ には $\boxed{⓪}$ が当てはまる．

一方，$k>1$ のとき ② において

$$\begin{cases} \log_{10}k \text{ の値はつねに正であり，} \\ \dfrac{1}{\log_{10}2} - \dfrac{1}{\log_{10}3} - \dfrac{2}{\log_{10}5} \text{ は定数である．} \end{cases}$$

したがって

「$k>1$ の範囲で $\mathrm{AB}-\mathrm{BC}$ の正負は変わらない．」

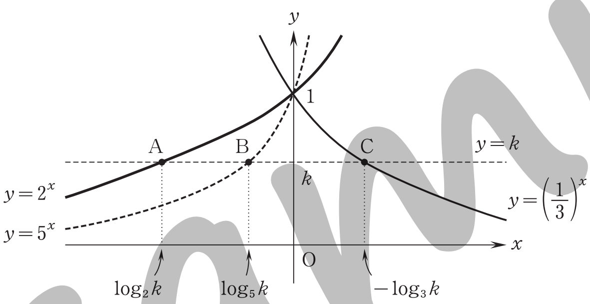
いま $k=5$ のとき $\mathrm{AB}-\mathrm{BC}<0$ であったので

「$k>1$ の範囲でつねに $\mathrm{AB}-\mathrm{BC}<0$」

となる．つまり $k>1$ のときつねに

$$\mathrm{AB}<\mathrm{BC}$$

であり，$\boxed{オ}$ には $\boxed{⓪}$ が当てはまる．



$0<k<1$ のときも，A，B，C の x 座標は $k>1$ の場合と同じであるが，A，B，C の並び方は上の図のようになる．よって，このとき

$$\begin{cases} \mathrm{AB} = \log_5 k - \log_2 k, \\ \mathrm{BC} = (-\log_3 k) - \log_5 k. \end{cases}$$

これらは $k>1$ の場合の ① の 2 つの式で右辺を -1 倍したものであるので，$\mathrm{AB}-\mathrm{BC}$ も $k>1$ の場合の式 ② の右辺を -1 倍した式で表され

$$\mathrm{AB}-\mathrm{BC} = -\log_{10}k\left(\frac{1}{\log_{10}2} - \frac{1}{\log_{10}3} - \frac{2}{\log_{10}5}\right).$$

ここで，$0<k<1$ であるので

$$\begin{cases} \log_{10}k < 0, \\ \dfrac{1}{\log_{10}2} - \dfrac{1}{\log_{10}3} - \dfrac{2}{\log_{10}5} \text{ は負の定数} \end{cases}$$

であるので，このときも $\mathrm{AB}-\mathrm{BC}<0$ となり

$$\mathrm{AB}<\mathrm{BC}.$$

よって，$\boxed{カ}$ には $\boxed{⓪}$ が当てはまる．

← $\begin{cases} \dfrac{0.6990}{0.3010} < \quad 3, \\ -\left(\dfrac{0.6990}{0.4771}+2\right) < -3 \end{cases}$

を辺々加えると

$\mathrm{AB}-\mathrm{BC}<0.$

← $\dfrac{1}{\log_{10}2} = 3.322\cdots,$

$\dfrac{1}{\log_{10}3} = 2.095\cdots,$

$\dfrac{1}{\log_{10}5} = 1.430\cdots$

から

$\dfrac{1}{\log_{10}2} - \dfrac{1}{\log_{10}3} - \dfrac{2}{\log_{10}5}$

$= -1.63\cdots$

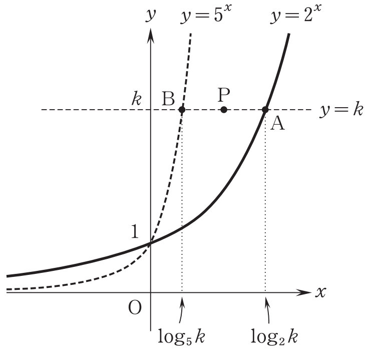
を導いてもよい．

← $k=5$ のとき，② において

$\begin{cases} \mathrm{AB}-\mathrm{BC}<0, \\ \log_{10}k > 0 \end{cases}$

であった．

(2)



線分 AB の中点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とする．

$$\mathrm{A}(\log_2 k,\ k),\quad \mathrm{B}(\log_5 k,\ k)$$

であるので

$$\begin{cases} x = \dfrac{\log_2 k + \log_5 k}{2}, \\ y = \dfrac{k + k}{2}. \end{cases}$$

したがって

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\log_{10} k}{\log_{10} 2} + \dfrac{\log_{10} k}{\log_{10} 5}\right), \\ y = k \end{cases}$$

となり，k を消去すると

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\log_{10} 2} + \frac{1}{\log_{10} 5}\right)\log_{10} y. \qquad \cdots ③$$

一方，P の軌跡を $y = a^x$ と表すことを考えよう．この両辺の 10 を底とする対数をとると

$$\log_{10} y = x \log_{10} a.$$

③ は

$$\log_{10} y = \frac{2\log_{10} 2 \cdot \log_{10} 5}{\log_{10} 2 + \log_{10} 5} \cdot x$$

と変形できる．これと上の等式は一致するので

$$\log_{10} a = \frac{2\log_{10} 2 \cdot \log_{10} 5}{\log_{10} 2 + \log_{10} 5}.$$

ここで，$\log_{10} 2 + \log_{10} 5 = \log_{10}(2 \cdot 5) = \log_{10} 10 = 1$ であるので

$$\begin{aligned} \log_{10} a &= 2\log_{10} 2 \cdot \log_{10} 5 \\ &= 2 \times 0.3010 \times 0.6990 \\ &= 0.420798. \end{aligned}$$

常用対数表により，これを満たす a は

$$2.63 < a < 2.64$$

の範囲に存在する．a の小数第 2 位を四捨五入した値は $\boxed{2}.\boxed{6}$ となる．

← $k = 1$ のときは，点 A，点 B はともに点 $(0,\ 1)$ となるが，そのときは $\mathrm{P}(0,\ 1)$ としている．

← 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ はこの関係式を満たして動く．つまり，点 P の軌跡は ③ で表される．

← $\log_a x + \log_a y = \log_a xy$,
$\log_a a = 1$.
ただし a は 1 でない正の数で，
$x > 0,\ y > 0$.

← $\log_{10} 2.63 = 0.4200$,
$\log_{10} 2.64 = 0.4216$.

第3問　微分法・積分法　（配点　22）

$f(x)$ は3次関数で

$$\begin{cases} y=f(x) \text{ のグラフは点 } (1,\ 0) \text{ を通る，} & \cdots ① \\ y=f(x) \text{ のグラフは点 } (1,\ 0) \text{ に関して対称，} & \cdots ② \\ x=0 \text{ で極小値をとる．} & \cdots ③ \end{cases}$$

① から $f(1)=\boxed{0}$ である．また ③ より $f'(0)=\boxed{0}$ が必要である．

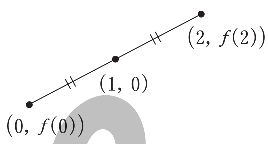
← 関数 $f(x)$ が
$x=\alpha$ で極値をとる
$\Longrightarrow f'(\alpha)=0$
である．

② より2点 $(0,\ f(0))$，$\left(\boxed{2},\ f(2)\right)$ を両端とする線分の中点が $(1,\ 0)$ なので，y 座標に着目して

$$\frac{f(0)+f(2)}{2}=\boxed{0}$$

が成り立つ．

←



$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \quad (a,\ b,\ c,\ d \text{ は実数で } a\neq 0)$$

とすると，$f'(x)=3ax^2+2bx+c$ なので，$f(1)=0$，$f'(0)=0$ から

$$a+b+c+d=0,$$
$$c=0.$$

また，$\dfrac{f(0)+f(2)}{2}=0$ から

$$\frac{8a+4b+2c+2d}{2}=0 \quad \text{つまり} \quad 4a+2b+c+d=0$$

← $f(0)=d$，
$f(2)=8a+4b+2c+d$．

なので，これらより

$$b=-3a, \quad c=0, \quad d=2a$$

となる．このとき

$$\begin{aligned} f(x)&=ax^3-3ax^2+2a \\ &=a(x^3-3x^2+2) \end{aligned}$$

なので，

$$\begin{aligned} f'(x)&=a(3x^2-6x) \\ &=a\cdot 3x(x-2). \end{aligned}$$

$a>0$，$a<0$ のときの $f(x)$ の増減はそれぞれ次のようになる．

$a>0$ のとき

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$a<0$ のとき

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

③ から $f(x)$ は $x=0$ で極小値をとるので，上の表から $a<0$ である．

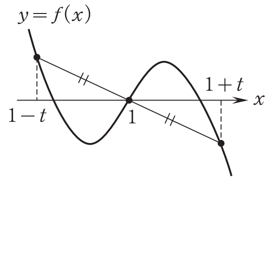
したがって，①，②，③ を満たす $f(x)$ について

$$b=\boxed{-3}a, \quad c=\boxed{0}, \quad d=\boxed{2}a$$

であり，$f(x)$ は a を用いて

$$\begin{aligned} f(x)&=ax^3-3ax^2+2a \\ &=a(x^3-3x^2+2) \\ &=a(x-1)\left(x^2-\boxed{2}x-\boxed{2}\right) \end{aligned}$$

← $f(1)=0$ から $f(x)$ は $x-1$ を因数にもつ．
また
$$f(x)=a(x-1)^3-3a(x-1)$$
と変形できるので，実数 t に対して
$$f(1+t)=at^3-3at,$$
$$\begin{aligned} f(1-t)&=a(-t)^3-3a(-t) \\ &=-at^3+3at \end{aligned}$$
となり
$$\frac{f(1+t)+f(1-t)}{2}=f(1)$$
が成り立つことがわかる．
よって，曲線 $y=f(x)$ は点 $(1,\ f(1))$ に関して対称となっている．



と表せる．また，$a<0$ から $\boxed{サ}$ には $\boxed{①}$ が当てはまる．

$g(x)=a|x-1|(x^2-2x-2)$ とすると，

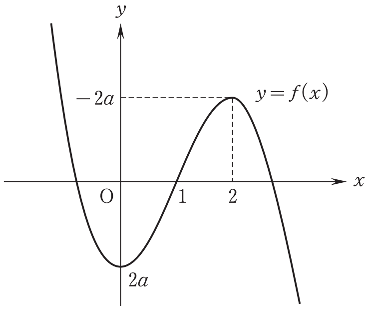
$$|x-1|=\begin{cases} x-1 & (x\geqq 1), \\ -(x-1) & (x\leqq 1) \end{cases}$$

なので，

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\geqq 1), \\ -f(x) & (x\leqq 1) \end{cases}$$

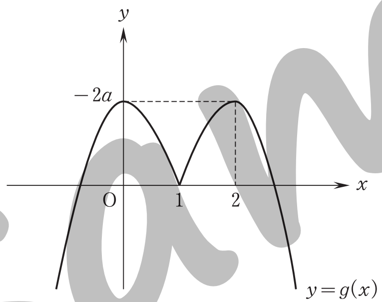
である．そこで，$y=f(x)$ のグラフの概形を考える．

前出の増減表と，グラフが点 $(1,\ 0)$ に関して対称なことから $y=f(x)$ のグラフの概形は次の通りである．

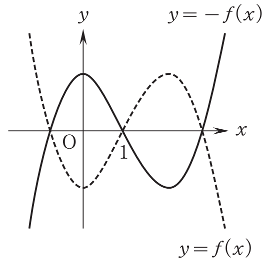


← $f(0)=2a$.

したがって，$y=g(x)$ のグラフの概形は次の通り．



← $y=-f(x)$ のグラフの概形は次の通り．



$\boxed{シ}$ には $\boxed{④}$ が当てはまる．

(1) $f(x)$ の極小値は $f(0)=2a$ なので，$g(x)$ の極大値は $-2a$ である．

$f(x)$ の極小値が -2 のとき，$2a=-2$ から $a=-1$（これは $a<0$ を満たす）なので，$g(x)$ の極大値は $-2\times(-1)=2$ である．よって，$\boxed{ス}$ には $\boxed{②}$ が当てはまる．

← $f(x)=ax^3-3ax^2+2a$.
$g(x)$ は $x=0$，2 のとき極大値 $-2a$ をとる．

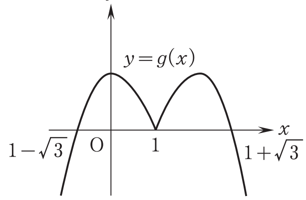
また，$g(x)=0$ となる x を求めると，

$$a|x-1|(x^2-2x-2)=0$$

から

$$|x-1|=0,\quad x^2-2x-2=0$$

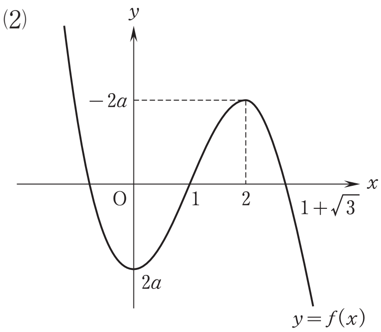
なので，$x=1$，$1\pm\sqrt{3}$ である．$y=g(x)$ のグラフから $g(x)\leqq 0$ となる x の条件は

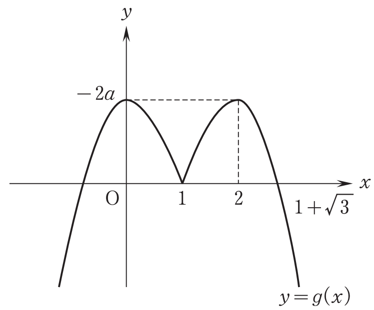


$$x\leqq 1-\sqrt{3},\quad x=1,\quad 1+\sqrt{3}\leqq x$$

であるから，$\boxed{セ}$ には $\boxed{⑥}$ が当てはまる．

(2)





$x \geqq 0$ のとき

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt,\quad G(x)=\int_0^x g(t)\,dt$$

とすると，

$$F(x)+G(x)=\int_0^x \{f(t)+g(t)\}\,dt$$

である．

$0 \leqq x \leqq 1$ のとき，$g(x)=-f(x)$ なので，$f(t)+g(t)=0$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ から

← $g(x)=\begin{cases} -f(x) & (x \leqq 1), \\ f(x) & (x \geqq 1). \end{cases}$

$$F(x)+G(x)=0$$

である．よって，$\boxed{ソ}$ には $\boxed{⓪}$ が当てはまる．

$1 \leqq x$ のとき，$g(x)=f(x)$ なので

$$\begin{aligned} F(x)+G(x) &= \int_0^x \{f(t)+g(t)\}\,dt \\ &= \int_0^1 \{f(t)+g(t)\}\,dt+\int_1^x \{f(t)+g(t)\}\,dt \\ &= 0+\int_1^x 2f(t)\,dt \end{aligned}$$

である．よって

$$\frac{d}{dx}\{F(x)+G(x)\}=\{F(x)+G(x)\}'=2f(x)$$

← $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt=f(x)$.

であり，$x \geqq 1$ における $F(x)+G(x)$ の増減は次の通り．

x	1	$\cdots$	$1+\sqrt{3}$	$\cdots$
$\{F(x)+G(x)\}'$		$+$	0	$-$
$F(x)+G(x)$		↗		↘

← $\{F(x)+G(x)\}'$ の符号は $f(x)$ の符号と一致する．

したがって，$F(x)+G(x)$ は $x=\boxed{1}+\sqrt{\boxed{3}}$ のとき最大となる．

第４問　数　　列　（配点　16）

すべての自然数 n に対して

$$a_{n+1}=2a_n+1 \quad \cdots ①$$

が成り立つ．

① に $n=1$ を代入し，$a_1=3$ を用いると　$a_2=2a_1+1=7$.

① に $n=2$ を代入すると　$a_3=2a_2+1=15$.

① に $n=3$ を代入すると　$a_4=2a_3+1=31$.

① に $n=4$ を代入すると　$a_5=2a_4+1=\boxed{63}$.

また，漸化式 ① から

$$a_{n+1}+1=2(a_n+1).$$

これがすべての自然数 n に対して成り立つので，数列 $\{a_n+1\}$ は公比が 2 の等比数列である．その第 n 項は

$$\begin{aligned} a_n+1&=(a_1+1)2^{n-1}\\ &=4\cdot 2^{n-1}=2^{n+1} \end{aligned}$$

となるので，

$$a_n=2^{n+1}-\boxed{1}\qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\qquad \cdots ②$$

と表される．よって，$\boxed{ウ}$ には $\boxed{③}$ が当てはまる．

← ① を
$$a_{n+1}-\alpha=2(a_n-\alpha)$$
と変形することを考える．
　これを整理した式
$$a_{n+1}=2a_n-\alpha$$
と ① を比較すると
$$\alpha=-1$$
を得るので，① は
$$a_{n+1}+1=2(a_n+1)$$
と変形される．

(1)　$a_4=31$ であるから，与えられた数の並びにおいて，4 行目は

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots,\ 31$$

となり，4 行目には $\boxed{16}$ 個の数が並ぶ．これら 16 個の数の和は

$$\frac{16(1+31)}{2}=16^2=\boxed{256}.$$

← $31=2\cdot 16-1$ であるから，これは小さい方から 16 番目の正の奇数．

← 初項 a，末項 ℓ，項数 n の等差数列の和は　$\dfrac{n(a+\ell)}{2}$.

$a_k=2^{k+1}-1$ であるから，与えられた数の並びにおいて，k 行目は

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots,\ 2^{k+1}-1$$

となる．$2^{k+1}-1=2\cdot 2^k-1$ であるから，この k 行目には 2^k 個の数が並び，それらの総和は

$$\frac{2^k\{1+(2^{k+1}-1)\}}{2}=\frac{2^k\cdot 2^{k+1}}{2}=4^k.$$

← $2^k\cdot\dfrac{2^{k+1}}{2}=(2^k)^2$
$$=2^{2k}=4^k.$$

したがって，与えられた数の並びにおいて，1 行目から n 行目に並んでいる数を全部加えた和は

$$\begin{aligned} 4^1+4^2+4^3+\cdots+4^n&=\frac{4(4^n-1)}{4-1}\\ &=\frac{\boxed{4}^{n+1}-\boxed{4}}{\boxed{3}} \end{aligned}$$

である．よって，$\boxed{サ}$ には $\boxed{③}$ が当てはまる．

← 初項 4，公比 4，項数 n の等比数列の和．
　初項 a，公比 r，項数 n の等比数列の和は
$$\begin{cases} r\neq 1 \text{ なら } \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}, \\ r=1 \text{ なら } na. \end{cases}$$

(2)　与えられた数の並びにおいて，n 行目の最後の数 $a_n=2^{n+1}-1$ がはじめて 4 桁の整数となるのは $n=9$ の場合の

$$a_9=2^{10}-1=1023$$

である．

また，$1001=2\cdot 501-1$ であるから

　　1001 は正の奇数の中で小さい方から 501 番目である．

以上により，はじめて現れる 4 桁の整数は

$$\boxed{9}\ \text{行目の}\ \boxed{501}\ \text{番目}$$

にある．

第5問　統計的な推測　（配点　16）

1つのサイコロを振るとき，

$$1\text{の目が出る確率は } \frac{1}{6},$$

$$1\text{以外の目が出る確率は } \frac{5}{6}$$

である．

規則により，2つのサイコロA，Bを同時に振ったとき，点P$(x,\ y)$が

点$(x+1,\ y+1)$に移る確率は　$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$，

点$(x+1,\ y)$に移る確率は　$\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{36}$，

点$(x,\ y+1)$に移る確率は　$\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{5}{36}$，

動かない確率は　$\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{25}{36}$

である．

← 点Pの座標について，x座標はサイコロAの目によって決まり，y座標はサイコロBの目によって決まる．
　サイコロA，Bの目の出方は互いに独立である．

(1)　2つのサイコロA，Bを同時に3回振る．

このとき，点Pのx座標が2となるのは，サイコロAに関して3回のうち2回は1の目が出て，1回は1以外の目が出るときである．よって，その確率は

$${}_3C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^1=3\times\frac{5}{6^3}=\frac{\boxed{5}}{\boxed{72}}$$

である．

← 1回の試行で事象Aが起こる確率をpとする．各回の試行が独立であるならば，この試行をn回繰り返し行うとき，事象Aがちょうどr回起こる確率は
$${}_nC_r\,p^r(1-p)^{n-r}.$$

点Pのy座標が1となるのは，サイコロBに関して3回のうち1回は1の目が出て，2回は1以外の目が出るときである．よって，その確率は

$${}_3C_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^2=3\times\frac{5^2}{6^3}=\frac{\boxed{25}}{\boxed{72}}$$

である．

したがって，点Pの座標が$(2,\ 1)$となる確率は $\frac{5}{72}\times\frac{25}{72}$ である．

(2)　2つのサイコロA，Bを同時に720回振ったとき，点Pのx座標をXとすると，確率変数Xは二項分布$B\left(720,\ \frac{1}{6}\right)$に従う．

← サイコロAを720回振ったとき，1の目が出る回数がXである．

よって，確率変数Xの平均(期待値)$E(X)$は

$$E(X)=720\times\frac{1}{6}=\boxed{120}$$

である．また，分散$V(X)$は

$$V(X)=720\times\frac{1}{6}\times\left(1-\frac{1}{6}\right)=100$$

なので，標準偏差$\sigma(X)$は

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{100}=\boxed{10}$$

である．

← 確率変数Xが二項分布$B(n,\ p)$に従うとき，
$$E(X)=np,$$
$$V(X)=npq\quad(q=1-p).$$

ここで，試行回数 720 は十分に大きいと考えられるので，確率変数 Z を

$$Z=\frac{X-E(X)}{\sigma(X)}$$

つまり

$$Z=\frac{X-\boxed{120}}{\boxed{10}}$$

とおけば，Z は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う．

ここで，

$$100 \leqq X \leqq 130$$

は

$$-2 \leqq Z \leqq 1$$

と同値変形されるので，

$$\begin{aligned}P(100 \leqq X \leqq 130)&=P(-2 \leqq Z \leqq 1)\\&=P(0 \leqq Z \leqq 2)+P(0 \leqq Z \leqq 1)\end{aligned}$$

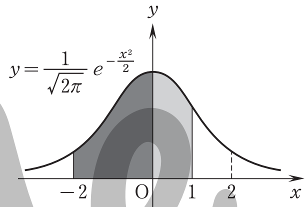
と表される．正規分布表を使うと

$$\begin{aligned}P(0 \leqq Z \leqq 2)+P(0 \leqq Z \leqq 1)&=0.4772+0.3413\\&=0.8185\end{aligned}$$

なので，小数第 4 位を四捨五入することにより

$$P(100 \leqq X \leqq 130)=0.\boxed{819}$$

である．

← 

点Pの y 座標を Y とすると，確率変数 Y は二項分布 $B\left(720,\ \frac{1}{6}\right)$ に従うから，

← サイコロBを 720 回振ったとき，1 の目の出る回数が Y である．

$$E(Y)=120,\quad \sigma(Y)=10$$

である．確率変数 Z' を

$$Z'=\frac{Y-120}{10}$$

と定めると，Z' は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う．

ここで，

$$120 \leqq Y \leqq 140$$

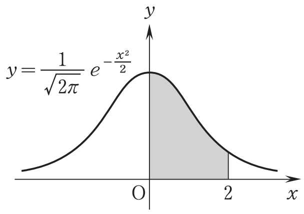
は

$$0 \leqq Z' \leqq 2$$

と同値変形されるので，

$$\begin{aligned}P(120 \leqq Y \leqq 140)&=P(0 \leqq Z' \leqq 2)\\&=0.4772\end{aligned}$$

である．

← 

したがって，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が座標平面上で $100 \leqq x \leqq 130$ かつ $120 \leqq y \leqq 140$ を満たす長方形の周上または内部にある確率は

$$\begin{aligned}P(100 \leqq X \leqq 130)\times P(120 \leqq Y \leqq 140)&\\=0.8185\times 0.4772&\end{aligned}$$

と表され，これを計算して小数第 4 位を四捨五入することにより

$$0.\boxed{391}$$

← 2 つの確率変数 X，Y は独立である．

← $0.8185\times 0.4772=0.39058820$ である．

を得る．

第６問　平面ベクトル　（配点　16）

Ｐは辺ABを $p:(1-p)$ に外分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{p}{2p-1}\overrightarrow{\mathrm{AB}}.$$

Ｑは辺CAを $q:(1-q)$ に外分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{1-q}{1-2q}\overrightarrow{\mathrm{AC}}.$$

Ｒは辺BCを $1:2$ に外分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{-2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{1-2}=\boxed{2}\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}.$$

したがって，$\boxed{\text{ア}}$ には $\boxed{⓪}$，$\boxed{\text{イ}}$ には $\boxed{⑦}$ が当てはまる．

(1)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{RP}}&=\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AR}}\\&=\frac{p}{2p-1}\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\left(2\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\\&=\frac{-3p+2}{2p-1}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{RQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AR}}\\&=\frac{1-q}{1-2q}\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\left(2\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\\&=-2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{3q-2}{2q-1}\overrightarrow{\mathrm{AC}}.\end{aligned}$$

３点Ｐ，Ｑ，Ｒが同一直線上にあるとき，適当な実数 k を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{RP}}$$

と表せる．これより

$$-2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{3q-2}{2q-1}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{-3p+2}{2p-1}k\overrightarrow{\mathrm{AB}}+k\overrightarrow{\mathrm{AC}}.$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は１次独立であるから

$$\begin{cases}-2=\dfrac{-3p+2}{2p-1}k,\\[2mm]\dfrac{3q-2}{2q-1}=k.\end{cases}$$

したがって

$$-2=\frac{-3p+2}{2p-1}\cdot\frac{3q-2}{2q-1}$$

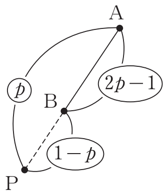
から

$$2(2p-1)(2q-1)=(3p-2)(3q-2).$$

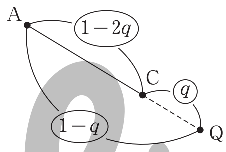
よって

$$pq-2p-2q+2=0. \qquad \cdots(*)$$

これより，$\boxed{\text{エ}}$ には $\boxed{②}$ が当てはまる．



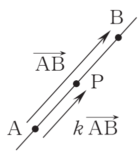
$\left(\frac{1}{2}<p<1\ \text{のときの図}\right)$



$\left(0<q<\frac{1}{2}\ \text{のときの図}\right)$

$0<p<\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}<q<1$ の場合，図は上と異なるが，同じ結果を得る．

← ２点A，Bが異なるとき
　点Ｐが直線AB上にある
$\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となる実数 k が存在する．



２つのベクトルがともに零ベクトルでなく，互いに平行でないとき，２つのベクトルは１次独立であるという．

(2) G_1 は三角形 ABC の重心であるから

$$\overrightarrow{AG_1}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{3}}\overrightarrow{AB}+\frac{\boxed{1}}{\boxed{3}}\overrightarrow{AC}. \quad \cdots ①$$

G_2 は三角形 PQR の重心であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG_2}&=\frac{1}{3}\overrightarrow{AP}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AQ}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AR}\\&=\frac{1}{3}\cdot\frac{p}{2p-1}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1-q}{1-2q}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)\\&=\frac{5p-2}{3(2p-1)}\overrightarrow{AB}+\frac{-q}{3(2q-1)}\overrightarrow{AC}. \quad \cdots ②\end{aligned}$$

G_1 と G_2 が一致するとき，①，② より

$$\begin{cases}\dfrac{5p-2}{3(2p-1)}=\dfrac{1}{3},\\[2mm] \dfrac{-q}{3(2q-1)}=\dfrac{1}{3}.\end{cases}$$

← 分母を払うと
$$\begin{cases}5p-2=2p-1,\\ -q=2q-1\end{cases}$$
となる.

したがって

$$p=\frac{\boxed{1}}{\boxed{3}},\quad q=\frac{\boxed{1}}{\boxed{3}}.$$

これは，$0<p<1$，$0<q<1$，$p\neq\frac{1}{2}$，$q\neq\frac{1}{2}$ を満たす.

← これらの値は(*)を満たさないので，3 点 P，Q，R は同一直線上になく，三角形 PQR は成立している.

$$\left|\overrightarrow{AG_1}\right|=1$$

より

$$\left|\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right|=1.$$

両辺を 2 乗すると

$$\left|\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right|^2=1^2.$$

したがって

$$\frac{1}{9}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\frac{2}{9}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{1}{9}\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=1.$$

$\left|\overrightarrow{AB}\right|=2$，$\left|\overrightarrow{AC}\right|=3$ であるから

$$\frac{1}{9}\cdot4+\frac{2}{9}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{1}{9}\cdot9=1$$

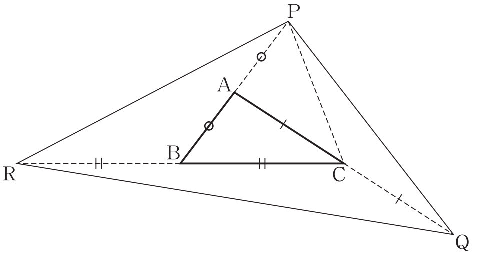
となり

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\boxed{-2}.$$

$\overrightarrow{AP}=\dfrac{p}{2p-1}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AQ}=\dfrac{1-q}{1-2q}\overrightarrow{AC}$ で $p=\dfrac{1}{3}$，$q=\dfrac{1}{3}$ として，

$$\overrightarrow{AP}=-\overrightarrow{AB},\quad \overrightarrow{AQ}=2\overrightarrow{AC}$$

となるので，三角形 ABC と 3 点 P，Q，R は次の図のようになる.



AB＝AP から △PAC＝△ABC，AC＝CQ から △PAC＝△PCQ なので，

$$\triangle \mathrm{APQ} = 2\triangle \mathrm{ABC}.$$

同様にして，△BPR＝△CRQ＝2△ABC.

これより

$$\begin{aligned}\triangle \mathrm{PQR} &= \triangle \mathrm{ABC} + \triangle \mathrm{APQ} + \triangle \mathrm{BPR} + \triangle \mathrm{CRQ}\\ &= \triangle \mathrm{ABC} + 3\cdot 2\triangle \mathrm{ABC}\\ &= 7\triangle \mathrm{ABC}.\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}\triangle \mathrm{ABC} &= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2^2\cdot 3^2 - (-2)^2}\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{32}\\ &= 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

であるから

$$\triangle \mathrm{PQR} = 7\triangle \mathrm{ABC} = 7\cdot 2\sqrt{2} = \boxed{14}\sqrt{\boxed{2}}.$$

← 点 P は辺 AB を

$$p:(1-p) = \frac{1}{3}:\frac{2}{3} = 1:2$$

に外分する．

同様に点 Q は辺 CA を 1:2 に外分する．

第 7 問　平面上の曲線　（配点　16）

楕円 E の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$$

であるから，焦点の座標は

$$\mathrm{F}\left(\sqrt{a^2-b^2},\ 0\right),\quad \mathrm{F}'\left(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0\right).$$

したがって，$\boxed{ア}$ には $\boxed{⑦}$ が当てはまる．

E 上の任意の点 P に対して，2 焦点から P までの距離の和が一定であるから A$(a,\ 0)$ とすると

$$\mathrm{FP} + \mathrm{F'P} = \mathrm{FA} + \mathrm{F'A} = \left(a - \sqrt{a^2-b^2}\right) + \left\{a - \left(-\sqrt{a^2-b^2}\right)\right\} = 2a$$

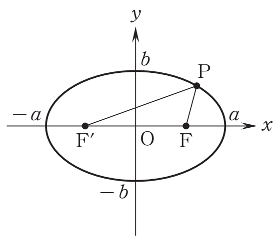
が成り立つ．

したがって，$\boxed{イ}$ には $\boxed{①}$ が当てはまる．

P$(x,\ y)$ とおくと，P は E 上より

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

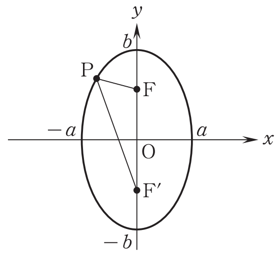
←



$b > a > 0$ のときの焦点の座標は

$\mathrm{F}\left(0,\ \sqrt{b^2-a^2}\right)$，$\mathrm{F}'\left(0,\ -\sqrt{b^2-a^2}\right)$.

$\mathrm{FP} + \mathrm{F'P} = 2b$.



すなわち

$$y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

が成り立つ．

これを用いると，線分 FP の長さは

$$\begin{aligned}\mathrm{FP}^2&=\left(x-\sqrt{a^2-b^2}\right)^2+y^2\\&=x^2-2\sqrt{a^2-b^2}x+a^2-b^2+b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\\&=\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2-2\sqrt{a^2-b^2}x+a^2\\&=\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}x-a\right)^2\end{aligned}$$

より

$$\mathrm{FP}=\left|\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}x-a\right|.$$

← p を実数とする．$\sqrt{p^2}=|p|$.

ここで，$-a\leqq x\leqq a$ と $0<\sqrt{a^2-b^2}<a$ であることから

$$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}x-a<\frac{a}{a}\cdot a-a=0.$$

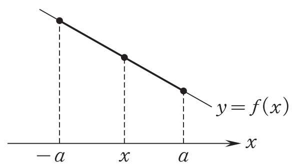
よって

$$\mathrm{FP}=a-\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}x.$$

したがって，$\boxed{ウ}$ には $\boxed{①}$ が当てはまる．

$$f(x)=a-\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}x$$

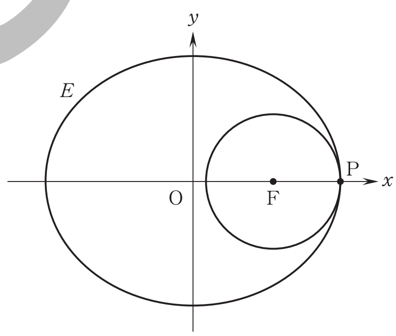
とおくと，$f(x)$ は単調減少であるから，$-a\leqq x\leqq a$ において，$x=a$ のとき $f(x)$ は最小となる．

← 

点 P の x 座標が大きいほど $f(x)=\mathrm{FP}$ は小さくなる．

このとき，線分 FP の長さを最小にする P の座標は $(a,\ 0)$ である．

したがって，$\boxed{エ}$ には $\boxed{②}$ が当てはまる．



MEMO

MEMO

MEMO

MEMO

MEMO

MEMO