

『2026 入試攻略問題集 東北大学数学』
解説の一部欠落について

『2026 入試攻略問題集 東北大学数学』におきまして、印刷不良により解説の一部に消えている箇所がございます。

該当ページ

23 ページ

32 ページ

正しいページを掲載いたします。

ご利用の皆様にはご迷惑をおかけしますこととお詫び申し上げます。

$$\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{1}{2} + 9 = \frac{49}{6} \quad \cdots \cdots \text{【答】}$$

【解説】

- (1) C 上の点 $(t, f(t))$ ($0 < t < 2$) における C の接線の方程式は

$$y = f'(t)(x - t) + f(t)$$

である。この直線を y 軸方向に $f(t)$ だけ平行移動した直線、すなわち、この直線と傾きが等しく点 $(t, 2f(t))$ を通る直線が ℓ であるから、 ℓ の方程式は

$$y = f'(t)(x - t) + 2f(t)$$

となる。 $x > 0$ においては $f(x) = -x^2 + 2x$, $f'(x) = -2x + 2$ であるから、 t が $0 < t < 2$ を満たすとき、 $f(t) = -t^2 + 2t$, $f'(t) = -2t + 2$ となり、 ℓ の方程式を t を用いて表すことができる。

さらに、 $0 < t < 2$ のとき、 $f(t) = -t^2 + 2t = t(2 - t) > 0$ であることに注意して C と ℓ を図示すれば、 C と ℓ の交点は $x < 0$ の範囲にのみ存在することがわかる。 $x < 0$ においては $f(x) = x^2 + x$ であるから、 $y = x^2 + x$ と ℓ の方程式を連立することで、その交点の x 座標を求めることができる。

試験中、図をかくこと自体を怠ったり、図をかいてはみたもののそれが雑であったせいで下線部の事実を見落としてしまった人は、以下のことに注意しながら、改めて図をかいてみよう。そうすれば下線部の事実を納得できるはずである。

以下、

$$C_1 : y = -x^2 + 2x, \quad C_2 : y = x^2 + x$$

として説明する。

- $0 < t < 2$ のとき、 $f(t) > 0$ であるから、 ℓ は上に凸の放物線 C_1 の接線を y 軸の正方向に平行移動したものである。よって、 C_1 は ℓ の下側にあり、原点 O も ℓ の下側にある。
 - C_2 は下に凸の放物線であり、 ℓ の下側にある原点 O を通るから、 ℓ と交点をもつ。
- (2) 題意の図形は【解答】の図のようになる。上側の境界線は ℓ であり、下側の境界線は $-2t \leq x \leq 0$ の範囲においては $y = x^2 + x$, $0 \leq x \leq 3$ の範囲においては $y = -x^2 + 2x$ である。したがって、【解答】のように、面積 S は $-2t \leq x \leq 0$ の範囲における定積分と $0 \leq x \leq 3$ の範囲における定積分に分けて立式する必要がある。あとはそれらの定積分の計算を正確に行えばよい。
- (3) S は t の 3 次関数であるから、導関数 $\frac{dS}{dt}$ の $0 < t < 2$ における符号変化をもとに S の増減を調べることで、その最小値を求めることができる。

を用いて、 $n=k+1$ のときの(*)、すなわち

$$2^{k+1} > 2\{(k+1)^2 - 1\} \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

を示す方法を考えることになる。

【解答】では、①の両辺を2倍し、④と同じ左辺をもつ不等式

$$2^{k+1} > 4(k^2 - 1) \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

を得て、さらに、②の右辺 $4(k^2 - 1)$ と ④の右辺 $2\{(k+1)^2 - 1\}$ に関する不等式

$$4(k^2 - 1) > 2\{(k+1)^2 - 1\} \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

が成り立つことを示した。②、③より

$$2^{k+1} > 4(k^2 - 1) > 2\{(k+1)^2 - 1\}$$

であるから、④が成り立つことがわかる。

なお、[Ⅱ]の記述の方法を、④の両辺の差の計算から開始し、その途中で①を用いる形にしてもよい。

$$\begin{aligned} 2^{k+1} - 2\{(k+1)^2 - 1\} &= 2 \cdot 2^k - 2(k^2 + 2k) \\ &> 2 \cdot 2(k^2 - 1) - 2(k^2 + 2k) \quad (\textcircled{1} \text{より}) \\ &= 2k^2 - 4k - 4 \\ &= 2k(k - 2) - 4 \\ &\geq 2 \cdot 7 \cdot 5 - 4 \quad (k \geq 7 \text{より}) \\ &> 0 \end{aligned}$$

このようにしても、④が成り立つことを示せる。

- (3) 与えられた不等式の左辺である $\sum_{k=1}^n \frac{(k-1)2^{k-1}}{k(k+1)}$ を計算するには、この式の形のままでは難しい。

そこで、(1)を、この和を計算するための誘導と捉えよう。【解答】のように、(1)より得られる等式

$$\frac{k-1}{k(k+1)} = \frac{2}{k+1} - \frac{1}{k} \text{ の両辺に } 2^{k-1} \text{ を掛けると,}$$

$$\frac{(k-1)2^{k-1}}{k(k+1)} = \frac{2^k}{k+1} - \frac{2^{k-1}}{k}$$

となり、

$$f(k) = \frac{2^{k-1}}{k} \text{ とすると, } \frac{2^k}{k+1} - \frac{2^{k-1}}{k} = f(k+1) - f(k) \text{ と表される}$$

から、 $\sum_{k=1}^n \left(\frac{2^k}{k+1} - \frac{2^{k-1}}{k} \right)$ を考えると、ほとんどの項が消去され、和を求めることができる。

$\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \right)$ を $\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$ と変形して、次のように和を求めた経験がある人は少なくないであろう。

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

$\sum_{k=1}^n \left(\frac{2^k}{k+1} - \frac{2^{k-1}}{k} \right)$ についても、これと同様に計算できる。

$\sum_{k=1}^n \frac{(k-1)2^{k-1}}{k(k+1)}$ を計算すると、与えられた不等式は $\frac{2^n}{n+1} - 1 \leq 2n - 5$ となり、この不等式は

$$2^n \leq 2(n-2)(n+1) \quad \cdots \cdots (**)$$

と同値である。

(**)を直接 n について解くことは難しいが、