

## はじめに

年々厳しくなる医学部合格のためには、他学部であれば解けなくてもよい問題も解かなくてはならないため、たくさんの教科でのハイレベルな学習が必要です。したがって、限られた時間でそれを成し遂げるには、よくまとまった教材を用い効率よく学習する必要があります。

私たちは長年受験指導をしてきましたが、医学部合格のための数学という視点で構成され受験生に薦められる参考書が見当たりませんでした。見当たらない理由は「医学部だから特別な数学(医学部数学)があるのか」、「ハイレベル数学とは違うのか」という疑問と無関係ではないでしょう。しかし、現に薦められる参考書は見当たらなかったのです。

本書は、医学部受験指導を長年担当している現役予備校講師が集まり、今までの失敗・成功の議論を重ね、不要なものをそぎ落とし、合格のために本当に必要なものを精選し解説したものです。問題の出典はできるだけ医学部の入試問題を用いました。入試に出題される以上、かなり高度な内容の問題も当然収録しています。しかしこれ以上は必要ないというところまで絞り込んでいます。逆に、どこの大学でも出題されれば受験生は正解するであろう基本的な内容は載せていません。

本書の編集の過程において、医学部合格のために必要な問題の選択基準は何かということが何度も議論になりました。集まったメンバーはそれぞれに確立された指導方法を持っていましたが、1つの分野1つのテーマという具体的素材の検討ということになるとその度ごとに意見の違いがあり素材選択の再検討ということを何度も行いました。この結果、選択基準は単純な画一的なものではなく、分野ごとテーマごとにさまざまな要因で総合的に判断されたものとなっており、偏見は少なく、より多くの読者に効率のよい学習を提供できるものになったと確信しています。医学部数学という単純なくくりでは本書を語れない理由がここにあると思います。違った立場の人の意見を聞くとなるほどと思うことも少なくなると私たち自身、本書の作成によって成長したように思います。

本書の編集にあたって、テーマ設定・問題の吟味等は複数のメンバーが共同であたり、解答・解説の執筆は数学Ⅰ・A・Ⅱ・Bは黒田恵悟が、数学Ⅲは西山清二が行いました。

医学部合格に特別な数学的センスは必要ありません。ただ、難しくてもマスターできるまで繰り返し繰り返し努力を続けられる情熱が必要です。そしてその経験は、将来医師として活躍されるときにきっと皆さんを支えてくれることでしょう。

黒田恵悟 しるす

## 受験生の皆さんに伝えたいこと

医学部受験生を教えて20数年が経ちました。その間、本当によい生徒たち、先生たちに出会い私自身も成長することができました。今回、好運にも執筆の機会を得ましたが、私はこの参考書にその20数年間の蓄積を集大成させました。

さて、医学部に合格することは確かに非常に難しいです。しかし、医学部に合格するために特別な才能が必要なわけではありません。実際、今医学部に通っている学生たちも、現在医師に従事している人たちも努力によってそれを勝ち得たのです。そして、それは皆さんにとっても努力によって必ず届く範囲です。

本書は医学部に出題率が高く典型的で質の高い問題を厳選しました。解答はなるべくわかり易く書いたつもりです。【解答】のあとの(解説)、(参考)は解答に対する補足、ポイントの整理、問題の意味を解説しました。(発展)では問題の背景やその問題と大学以降の数学とのつながりを述べたものです。こういうものを通して「数学って面白いんだ」と思ってもらえたら幸いです。

次に本書の活用法について述べます。

- 1 まず、ノートとエンピツを用意し、解けなくてもすぐにはあきらめずに【考え方】などを参照して「少なくとも25分」くらいは考えて下さい。
- 2 自力で解けなかったら【解答】、(解説)をじっくり読んで理解したら、ノートに自分なりの解答を書いて下さい。
- 3 そして類題をやります。

このようにして一通りやって下さい。これが一回目の勉強です。

さてこれからが大切です！物事は一回だけで修得できるというものはほとんどありません。卑近な例ですが、自転車に乗るのだって、逆上がりだって何度も何度も練習してできるようになります。

医学部の入試は平均するとだいたい100分で4題くらいです。したがって入試においては初見の問題を1題平均25分くらいで解くことになります。そのためには、すでに学習した問題が25分くらいで解答を見ないで解けるようになることが必要です。そこで、

- 4 本書にある問題、類題をすべて解答を見ないで25分くらいで解けるまで繰り返して下さい。その際、すべての計算を実行しきちんと解答をノートに書いて下さい。

知ることと繰り返すことは違います！医学部に合格した人たちに聞くと7回は繰り返したということをよく耳にします。このように繰り返し繰り返しやることで計算力がつき、数学特有の発想法や思考回路が脳の中にできあがっていくのでしょうか。数学が不得意な人は、数学こそは繰り返すことが必要だと肝に銘じて下さい。受験勉強というのは、ある意味では学んだ問題をすべて解けるようにしていく、しか方法はないのです。上の4で述べたことをやるかどうかは医学部への合否の別れ道です。

人間は計り知れない潜在能力を秘めています。成功を信じて頑張ってください。

なお初校の段階で中村拓人先生にみてもらいました。ここに感謝の意を表します。

2015年9月 西山清二

## 三訂版のまえがき

今回、数学Ⅲの教科書の発展に『微分方程式』が復活しましたので、今回の改訂にあたり『微分方程式』を新たに6題追加しました。6題ですが以前大学入試に出題されていた『微分方程式』の典型問題は一通り入れました。今までも教科書の発展から医学部の入試ではしばしば出題されていますので、『微分方程式』も出題される可能性は十分あります。

しっかり学習されることを強くすすめます。

なお、ベクトルは従来通り『医学部攻略のⅠAⅡB』にあります。

2025年8月 西山清二

# 目次

はじめに

受験生の皆さんに伝えたいこと

## 第1章 極限

問題1	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n} = 0$ の証明	8	類題1	9
問題2	漸化式で定まる数列の極限 $ x_{n+1} - \alpha  \leq K x_n - \alpha $	10	類題2	13
問題3	ニュートン法	14	類題3	17
問題4	$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ の応用	18	類題4	19
問題5	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$	20	類題5	21
問題6	無限級数の和	22	類題6	23

## 第2章 微分法の応用

問題7	グラフの概形	24	類題7	25
問題8	パラメータ表示された曲線の 概形—リサージュ曲線	26	類題8 [リサージュ曲線]	29
問題9	最大・最小(1)	30	類題9	31
問題10	最大・最小(2) 独立2変数	32	類題10	33
問題11	最大・最小(3) 陰関数	34	類題11 [スネルの法則(屈折の法則)]	35
問題12	方程式への応用(接線の本数)	36	類題12	37
問題13	通過範囲	38	類題13	41
問題14	不等式への応用	42	類題14	43
問題15	凸不等式	44	類題15	47
問題16	エントロピー	48	類題16	51
問題17	$e^x > \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$	52	類題17	53

## 第3章 積分法の応用

問題18	定積分の計算(対称性の利用)	54	類題18	55
問題19	$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ (ウォリスの公式)	56	類題19 [ウォリスの公式]	57
問題20	ベータ関数	58	類題20	59
問題21	直交関数	60	類題21	61
問題22	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$ , $e$ の無理数性	62	類題22 [ライプニッツ級数・ メルカトル級数]	63
問題23	双曲線関数	64	類題23 [双曲線関数]	67
問題24	極座標と面積(レムニスケート)	68	類題24 [デカルトの正葉曲線]	71
問題25	パラメータ表示された曲線の 囲む面積(カージオイド)	72	類題25 [リマソン]	73
問題26	サイクロイドとその平行曲線の 囲む面積	74	類題26 [円の伸開線]	77
問題27	図形の回転体の体積	78	類題27	79
問題28	不等式で表された立体の体積	80	類題28 [球と円柱の共通部分の体積]	83

問題29	y 軸回転体の体積	84	類題29	85
問題30	斜軸回転体の体積	86	類題30	89
問題31	非回転体の体積	90	類題31	91
問題32	回転一葉双曲面	92	類題32	93
問題33	回転放物面	94	類題33	95
問題34	展開可能な曲面の面積 <sup>◆</sup>	96	類題34	97
問題35	曲線の長さ, 対数螺線	98	類題35 [円の垂足曲線]	99

#### 第4章 微分・積分総合

問題36	絶対値記号を含む定積分	100	類題36	101
問題37	定積分で表された関数	102	類題37	103
問題38	チェビシェフの多項式	104	類題38	107
問題39	体積の評価と極限	108	類題39 [面積の評価と極限]	111
問題40	$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} f(x)  \sin nx  dx$	112	類題40	115
問題41	格子点の個数の評価	116	類題41	117
問題42	面積(長方形)比較による 不等式とその応用	118	類題42	119
問題43	面積(台形)比較による 不等式とその応用	120	類題43	122
問題44	変数分離形の微分方程式	124	類題44	127
問題45	同次形の微分方程式	128	類題45	131
問題46	連立微分方程式	132	類題46	133
問題47	2階微分方程式	134	類題47	136
問題48	関数方程式	138	類題48	139
問題49	積分方程式	140	類題49	142
問題50	変位・速度・加速度	144	類題50	147
問題51	水の問題	148	類題51	149
問題52	確率と区分求積法	150	類題52	151

#### 第5章 2次曲線と極座標

問題53	楕円の準円	152	類題53 [楕円に外接する長方形]	153
問題54	楕円の極方程式	154	類題54	157
問題55	双曲線の性質	158	類題55 [双曲線の性質]	159

#### 第6章 複素数平面

問題56	代数方程式の共役解と複素数 平面上での解の配置	160	類題56 [複素数平面上での解の配置 (ファン・デン・ベルグの定理)]	163
問題57	1の5乗根	164	類題57 [1のn乗根]	167
問題58	1の7乗根	168	類題58 [1の7乗根]	170
問題59	$\sum_{k=0}^n \cos k\theta, \sum_{k=0}^n \sin k\theta$	172	類題59	173
問題60	複素数平面の図形への応用	174	類題60	175
問題61	平行・直交条件	176	類題61	179
問題62	三角形の相似条件と正三角形	180	類題62 [三角形の形状]	183
問題63	共線・共円条件	184	類題63 [共円条件]	185
問題64	1次分数変換	186	類題64 [反転]	189
問題65	複素数の点列の極限への応用	190	類題65	191
問題66	$w = z^2$	192	類題66	195
この本に登場する有名曲線				196

(注) 問題文の右肩の◆印はやや難問を表します。入試問題の出題大学名は現行の大学名にしてあります。[例] 高知医科大学→高知大 [医]

問題 1  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\alpha^n} = 0$  の証明

(1)  $h$  を正の数とすると、任意の自然数  $n$  に対して次の不等式が成立することを、数学的帰納法を用いて証明せよ。

$$(1+h)^n \geq 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2$$

(2)  $r$  を  $|r| < 1$  である実数とすると、等式  $\lim_{n \rightarrow \infty} nr^{n-1} = 0$  を証明し、

無限級数の和  $\sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1}$  を求めよ。

(島根大 [医])

【解答】

$$(1) (1+h)^n \geq 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 \quad \dots\dots(*)$$

(I)  $n=1$  のとき、

(左辺)  $= 1+h$ , (右辺)  $= 1+h$  であり、(\*) は成り立つ。

(II)  $n=k$  のとき、(\*) は成り立つとすると、

$$(1+h)^k \geq 1 + kh + \frac{k(k-1)}{2}h^2.$$

両辺に  $1+h$  ( $>0$ ) を掛けて、

$$\begin{aligned} (1+h)^{k+1} &\geq (1+h) \left\{ 1 + kh + \frac{k(k-1)}{2}h^2 \right\} \\ &= 1 + (k+1)h + \frac{k(k+1)}{2}h^2 + \frac{k(k-1)}{2}h^3 \\ &\geq 1 + (k+1)h + \frac{k(k+1)}{2}h^2. \end{aligned}$$

よって、(\*) は  $n=k+1$  のときも成り立つ。

(I), (II) より (\*) は任意の自然数  $n$  に対して成り立つ。

(2)  $r=0$  のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} nr^{n-1} = 0$  は明らかである。

$r \neq 0$  のとき、まず  $\lim_{n \rightarrow \infty} nr^n = 0$  を示す。

$|r| < 1$  より  $\frac{1}{|r|} > 1$  であるから、 $\frac{1}{|r|} = 1+h$  ( $h > 0$ ) とおける。

よって

$$0 < n|r|^n = \frac{n}{(1+h)^n} \leq \frac{n}{1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2} \quad ((*) \text{より})$$

$$\text{ここで、} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{n} + h + \frac{n-1}{2}h^2} = 0$$

であるから、はさみうちの原理より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n|r|^n = 0 \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} nr^n = 0$$

よって、 $\lim_{n \rightarrow \infty} nr^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nr^n}{r} = 0$ 。

次に、 $S_n = \sum_{k=1}^n kr^{k-1}$  とおく。

$$S_n = 1 + 2r + 3r^2 + \cdots + nr^{n-1}$$

$$-) rS_n = r + 2r^2 + \cdots + (n-1)r^{n-1} + nr^n$$

$$(1-r)S_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} - nr^n$$

$$\therefore S_n = \frac{1-r^n}{(1-r)^2} - \frac{nr^n}{1-r}$$

$|r| < 1$  より  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} nr^n = 0$  であるから

$$\sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{(1-r)^2}$$

**(解説)**

1 (1) の不等式は  $n \geq 2$  のとき、二項展開を用いても証明できます。

$$(1+h)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 h + {}_nC_2 h^2 + \cdots + {}_nC_n h^n$$

$$\geq 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2} h^2$$

2  $n \geq 2$  のとき、 $(1+h)^n \geq 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2} h^2 \geq \frac{n(n-1)}{2} h^2$  であるから、これより

$$0 < n|r|^n = \frac{n}{(1+h)^n} \leq \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2} h^2}$$

と評価してもよいです。

3  $a > 1$  のとき  $0 < \frac{1}{a} < 1$  であるから (2) の証明より  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n} = 0$  です。これは

指数関数  $a^n$  の発散のスピードが  $n$  に較べて非常に速いことを示しています。

たとえば  $a=2$  とすると、

$n$	1	2	3	...	10	...	100
$2^n$	2	4	8	...	$2^{10}$	...	$2^{100}$

$$2^{10} = 1024 \div 1000 \text{ であるから } \frac{10}{2^{10}} \div \frac{10}{1000} = 0.01, \quad \frac{100}{2^{100}} = \frac{100}{(2^{10})^{10}} \div \frac{100}{(10^3)^{10}} = \frac{1}{10^{28}} = 0.00 \cdots 01$$

$$a > 1 \text{ のとき, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n} = 0.$$

なお問題 17 を参照して下さい。

**類題 1**

(1)  $x > 0$  のとき、1 より大きい自然数  $n$  について、次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$(1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2$$

(2) 1 より大きい自然数  $n$  について、

$(1+n)^{\frac{1}{n}} = 1 + a_n$  とするとき、次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$1 \geq a_n + \frac{n-1}{2} a_n^2$$

(3) (2) の結果を用いて、次の極限值を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1+n)^{\frac{1}{n}}$$

(神戸大 [医])