はじめに

年々厳しくなる医学部合格のためには，他学部であれば解けなくてもよい問題も解かなくてはならないため，たくさんの教科でのハイレベルな学習が必要です．したがって，限られた時間でそれを成し遂げるには，よくまとまった教材を用い効率よく学習する必要があります．

私たちは長年受験指導をしてきましたが，医学部合格のための数学という視点で構成され受験生に薦められる参考書が見当たりませんでした．見当たらない理由は「医学部だから特別な数学(医学部数学)があるのか」,「ハイレベル数学とは違うのか」という疑問と無関係ではないでしょう．しかし，現に薦められる参考書は見当たらなかったのです．

本書は，医学部受験指導を長年担当している現役予備校講師が集まり，今までの失敗・成功の議論を重ね，不要なものをそぎ落とし，合格のために本当に必要なものを精選し解説したものです．問題の出典はできるだけ医学部の入試問題を用いました．入試に出題される以上，かなり高度な内容の問題も当然収録しています．しかしこれ以上は必要ないというところまで絞り込んでいます．逆に，どこの大学でも出題されれば受験生は正解するであろう基本的な内容は載せていません．

本書の編集の過程において，医学部合格のために必要な問題の選択基準は何かということが何度も議論になりました．集まったメンバーはそれぞれに確立された指導方法を持っていましたが，１つの分野１つのテーマという具体的素材の検討ということになるとその度ごとに意見の違いがあり素材選択の再検討ということを何度も行いました．この結果，選択基準は単純な画一的なものではなく，分野ごとテーマごとにさまざまな要因で総合的に判断されたものとなっており，偏見は少なく，より多くの読者に効率のよい学習を提供できるものになったと確信しています．医学部数学という単純なくくりでは本書を語れない理由がここにあると思います．違った立場の人の意見を聞くとなるほどと思うことも少なくなく私たち自身，本書の作成によって成長したように思います．

本書の編集にあたって，テーマ設定・問題の吟味等は複数のメンバーが共同であたり，解答・解説の執筆は数学Ⅰ・A・Ⅱ・Bは黒田惠悟が，数学Ⅲは西山清二が行いました．

医学部合格に特別な数学的センスは必要ありません．ただ，難しくてもマスターできるまで繰り返し繰り返し努力を続けられる情熱が必要です．そしてその経験は，将来医師として活躍されるときにきっと皆さんを支えてくれることでしょう．

黒田惠悟 しるす

受験生の皆さんに伝えたいこと

医学部受験生を教えて 20 数年が経ちました．その間，本当によい生徒たち，先生たちに出会え私自身も成長することができました．今回，好運にも執筆の機会を得ましたが，私はこの参考書にその 20 数年間の蓄積を集大成させました．

さて，医学部に合格することは確かに非常に難しいです．しかし，医学部に合格するために特別な才能が必要なわけではありません．実際，今医学部に通っている学生たちも，現在医師に従事している人たちも努力によってそれを勝ち得たのです．そして，それは皆さんにとっても努力によって必ず届く範囲です．

本書は医学部に出題率が高く典型的で質の高い問題を厳選しました．解答はなるべくわかり易く書いたつもりです．**【解答】**のあとの**（解説）**，**〈参考〉**は解答に対する補足，ポイントの整理，問題の意味を解説しました．**（発展）**では問題の背景やその問題と大学以降の数学とのつながりを述べたものです．こういうものを通して「数学って面白いんだ」と思ってもらえたら幸いです．

次に本書の活用法について述べます．

1　まず，ノートとエンピツを用意し，解けなくてもすぐにはあきらめずに**［考え方］**などを参照して「少なくとも 25 分」くらいは考えて下さい．

2　自力で解けなかったら**【解答】**，**（解説）**をじっくり読んで理解したら，ノートに自分なりの解答を書いて下さい．

3　そして**類題**をやります．

このようにして一通りやって下さい．これが**一回目の勉強**です．

さてこれからが大切です！　物事は一回だけで修得できるというものはほとんどありません．卑近な例ですが，自転車に乗るのだって，逆上がりだって何度も何度も練習してできるようになります．

医学部の入試は平均するとだいたい **100 分で 4 題**くらいです．したがって入試においては初見の問題を **1 題平均 25 分**くらいで解くことになります．そのためには，すでに学習した問題が 25 分くらいで解答を見ないで解けるようになることが必要です．そこで，

4　本書にある問題，類題をすべて**解答を見ないで 25 分くらいで解けるまで繰り返して下さい**．その際，すべての計算を実行しきちんと**解答をノートに書いて**下さい．

知ることと繰り返すことは違います！　医学部に合格した人たちに聞くと **7 回は繰り返した**ということをよく耳にします．このように繰り返し繰り返しやることで計算力がつき，数学特有の発想法や思考回路が脳の中にできあがっていくのでしょう．数学が不得意な人は，**数学こそは繰り返すことが必要**だと肝に銘じて下さい．受験勉強というのは，ある意味では学んだ問題をすべて解けるようにしていく，しか方法はないのです．上の **4** で述べたことをやるかどうかが医学部への**合否の別れ道**です．

人間は計り知れない潜在能力を秘めています．成功を信じて頑張って下さい．

なお初校の段階で中村拓人先生にみてもらいました．ここに感謝の意を表します．

2015 年 9 月　西山清二

三訂版のまえがき

今回，数学Ⅲの教科書の発展に『微分方程式』が復活しましたので，今回の改訂にあたり『微分方程式』を新たに 6 題追加しました．6 題ですが以前大学入試に出題されていた『微分方程式』の典型問題は一通り入れました．今までも教科書の発展から医学部の入試ではしばしば出題されていますので，『微分方程式』も出題される可能性は十分あります．

しっかり学習されることを強くすすめます．

なお，ベクトルは従来通り『医学部攻略のⅠAⅡB』にあります．

2025 年 8 月　西山清二

目　次

（注）　問題文の右肩の◆印はやや難問を表します．入試問題の出題大学名は現行の大学名にしてあります．［例］高知医科大→高知大［医］

問題 1 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0$ の証明

(1) h を正の数とするとき，任意の自然数 n に対して次の不等式が成立することを，数学的帰納法を用いて証明せよ．

$$(1+h)^n \geqq 1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2$$

(2) r を $|r|<1$ である実数とするとき，等式 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nr^{n-1}=0$ を証明し，

無限級数の和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1}$ を求めよ．

（島根大［医］）

【解答】

(1) $(1+h)^n \geqq 1+nh+\dfrac{n(n-1)}{2}h^2$ ……(＊)

(Ⅰ) $n=1$ のとき，

(左辺)$=1+h$，(右辺)$=1+h$ であり，(＊) は成り立つ．

(Ⅱ) $n=k$ のとき，(＊) は成り立つとすると，

$$(1+h)^k \geqq 1+kh+\frac{k(k-1)}{2}h^2.$$

両辺に $1+h$ (>0) を掛けて，

$$\begin{aligned}(1+h)^{k+1} &\geqq (1+h)\left\{1+kh+\frac{k(k-1)}{2}h^2\right\}\\ &=1+(k+1)h+\frac{k(k+1)}{2}h^2+\frac{k(k-1)}{2}h^3\\ &\geqq 1+(k+1)h+\frac{k(k+1)}{2}h^2.\end{aligned}$$

よって，(＊) は $n=k+1$ のときも成り立つ．

(Ⅰ), (Ⅱ) より (＊) は任意の自然数 n に対して成り立つ．

(2) $r=0$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} nr^{n-1}=0$ は明らかである．

$r\neq 0$ のとき，まず $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nr^n=0$ を示す．

$|r|<1$ より $\dfrac{1}{|r|}>1$ であるから，$\dfrac{1}{|r|}=1+h$ $(h>0)$ とおける．

よって

$$0<n|r|^n=\frac{n}{(1+h)^n}\leqq\frac{n}{1+nh+\dfrac{n(n-1)}{2}h^2} \quad ((＊)\text{ より})$$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1+nh+\dfrac{n(n-1)}{2}h^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\dfrac{1}{n}+h+\dfrac{n-1}{2}h^2}=0$

であるから，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty} n|r|^n=0 \qquad \therefore\ \lim_{n\to\infty} nr^n=0$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} nr^{n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{nr^n}{r}=0.$

次に，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kr^{k-1}$ とおく．

$$\begin{array}{rl} S_n= & 1+2r+3r^2+\cdots+nr^{n-1} \\ -)\ rS_n= & \quad r+2r^2+\cdots+(n-1)r^{n-1}+nr^n. \\ \hline (1-r)S_n= & 1+r+r^2+\cdots+r^{n-1}-nr^n \end{array}$$

$$\therefore\quad S_n=\frac{1-r^n}{(1-r)^2}-\frac{nr^n}{1-r}.$$

$|r|<1$ より $\lim_{n\to\infty}r^n=0$, $\lim_{n\to\infty}nr^n=0$ であるから

$$\sum_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{nr^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}S_n=\boldsymbol{\frac{1}{(1-r)^2}}.$$

(解説)

1 (1)の不等式は $n\geqq 2$ のとき，二項展開を用いても証明できます.

$$\begin{aligned}(1+h)^n&={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1h+{}_n\mathrm{C}_2h^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nh^n\\&\geqq 1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2.\end{aligned}$$

2 $n\geqq 2$ のとき，$(1+h)^n\geqq 1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2\geqq\frac{n(n-1)}{2}h^2$ であるから，これより

$$0<n|r|^n=\frac{n}{(1+h)^n}\leqq\frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}h^2}$$

と評価してもよいです.

3 $a>1$ のとき $0<\frac{1}{a}<1$ であるから(2)の証明より $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0$ です．これは指数関数 a^n の発散のスピードが n に較べて非常に速いことを示しています.

たとえば $a=2$ とすると，

n	1	2	3	$\cdots$	10	$\cdots$	100
2^n	2	4	8	$\cdots$	2^{10}	$\cdots$	2^{100}

$2^{10}=1024\fallingdotseq 1000$ であるから $\frac{10}{2^{10}}\fallingdotseq\frac{10}{1000}=0.01$, $\frac{100}{2^{100}}=\frac{100}{(2^{10})^{10}}\fallingdotseq\frac{100}{(10^3)^{10}}=\frac{1}{10^{28}}=0.00\cdots01$

$$\boxed{\boldsymbol{a>1}\text{ のとき，}\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{\frac{n}{a^n}=0}.}$$

なお**問題 17** を参照して下さい.

類 題 1

(1) $x>0$ のとき，1 より大きい自然数 n について，次の不等式が成り立つことを証明せよ.

$$(1+x)^n\geqq 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2.$$

(2) 1 より大きい自然数 n について，

$(1+n)^{\frac{1}{n}}=1+a_n$ とするとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ.

$$1\geqq a_n+\frac{n-1}{2}{a_n}^2$$

(3) (2)の結果を用いて，次の極限値を求めよ.

$$\lim_{n\to\infty}(1+n)^{\frac{1}{n}}$$

（神戸大［医］）