良問の風に吹かれて

良問の風に乗って基礎から応用に自然に辿り着く

「どんな問題を学習すれば入試問題を解く実力がつくのだろう。」
「良問を学習すればよいといわれるが，**良問ってどんな問題**なんだろう。」
「問題を解いて結果が一致すれば理解していることになるのだろうか。」

受験生ならこのようなことを考えたことがあるだろう。

一度解いたことのある問題を同じように考えて解けても，真に理解しているとは限らない。入試問題をパターン学習しても難関大学の合否を分ける難度の問題を解く実力はつかない。難関とされる大学は，公式や定理を丸暗記して使い方の練習を繰り返している受験生，パターン学習をして経験で解こうとしている受験生ではなく，定義を理解し公式や定理の根拠を理解しているかなど，いわゆる**「考える力」**がある受験生が合格できる問題を出題しようとしている。

本書では定義や定理の**「最も基本であることが理解できているのか」**がチェックできる問題から始め，そこから風に乗っているがごとく**基本がどのように応用されるのか**が体感できるように問題が並べられている。したがって**「分野」にとらわれず問題が並べられている。**

さらに，初めて解く入試問題において難しいのは**どんな道具（分野）を用いる**のか，**どこを変数に取る**と作業（計算）が楽になるのか，**論理をどのように駆使する**のかなどである。そのような**「問題を解くための糸口」**を見つける力，**「記述する力」**をつけなければならない。

多くの入試問題では，(1)，(2)，(3)…と小問で「誘導」されている場合が多いがそのような問題をいくら練習しても「問題を解く糸口」を見つける実力はつかない。

問題を解く方針に必然性がある問題に関しては，小問にあたる誘導を排して**自分で糸口が見つけられる力がつく**ように，実際に出題された**入試問題を改題**してある。いわゆる，目的地に到達する実力をつけるために「手すりのついた山登り」の練習ではなく，自分で手掛かり，ルートを考える「ボルダリング」の練習をするような構成にしてある。強制的に方針を押し付けられるのではなく，自由な発想で考えることの楽しさが感じられるようになれば自然に実力がつき，初めて見る問題も本書で学習してきた問題と基本的な構造が同じであることがわかってくる。そうなれば目指す大学の合格は間違いない。

問題を考える楽しみを味わおう。

本書の使い方

「問題編」と「考え方，解答，解説編」で構成してある。
「問題編」において難易度の高い問題には問題番号の右上に「＊」が付けられている。最初は解けなくても落胆することはないが，入試までには解けるようにしたい。

（出典の記されていないものは，オリジナル問題，出典不明などの問題である。）

「考え方，解答，解説編」において

考え方：問題文からどこに着目するのか，どんな道具（分野）が合理的なのか，どこを変数に取ると効率がよいのか，どんな予備知識が必要なのかなど問題を解く方針や糸口の見つけ方が載せられている。
問題を解くことができなかった場合，この部分だけ読んで再度チャレンジする。

●解答●：入試本番において記述すべきコンパクトにまとめた内容が載せられている。なお，式の変形，考え方，アイディア，注意すべきことなど**●解答●**の右側に赤で(ア)，(イ)，…でマークしてあり説明が**■解説■**に載せてある。

■解説■：**●解答●**の方針をなぜ選択したのかなど，ここで扱った問題の根底にある数学の内容や周辺の知識などが載せられている。問題を解くことだけに満足せず理解していくことが重要である。

いずれも問題の構造を理解する重要な指針である。
早速問題を解いて風に乗っていこう！
さらに，「良問の風　理系数学②」にも風が吹いている。
その風にも乗ろう！

第1章 数学のベースになる内容1
(恒等式，整式，対称式中心)

1 a，b，c を定数とする．

(1) すべての θ に対して，

$$a\sin\theta+b\cos\theta+c=0$$

が成り立つ a，b，c の値を求めよ．

(2)(i) ax^2+bx+c が x の相異なる3つの値 α，β，γ に対して0となるならば，$a=b=c=0$ であることを示せ．

(ii) 2次の整式 $f(x)$ と $g(x)$ について，x の相異なる3つの値 α，β，γ に対して，

$$f(\alpha)=g(\alpha),\quad f(\beta)=g(\beta),\quad f(\gamma)=g(\gamma)$$

が成り立つならば，$f(x)$ と $g(x)$ は恒等的に等しいことを示せ．

(iii) 少なくとも3つの異なる実数 x に対して

$$\frac{ax-2}{x-c}=\frac{3x+b}{x+1}$$

が成り立つとき，a，b，c の値を求めよ．

(東北学院大)

2 整式 $f(x)$ が次の条件を満たす．$f(x)$ を求めよ．

(i) 0でないすべての x に対して $x^3f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$

(ii) $f(-1)=4$

(iii) $f(0)=1$

(東北大(改))

第1章 数学のベースになる内容1
(恒等式，整式，対称式中心)

1

考え方

(1) 「すべての θ に対して $a\sin\theta+b\cos\theta+c=0$ が成り立つから両辺の係数を比較して $a=b=c=0$」と解答するのは**正しくない**.

たとえば

「すべての θ に対して $a\sin^2\theta+b\cos 2\theta+c=0$ が成り立つ」という問題では

$a\sin^2\theta+b(1-2\sin^2\theta)+c=0$, $(a-2b)\sin^2\theta+b+c=0$ より

$\begin{cases} a-2b=0 \\ b+c=0 \end{cases}$ で成り立つ. (両辺の係数を比較して「$a=b=c=0$」は**十分条件**($a=b=c=0$ 以外でも成り立つ))

係数が比較できるのは整式（多項式）の恒等式の場合である.

（2次以下の整式の恒等式についての）証明は(2)(i)である.

n 次以下の整式についても同様に証明できる.

(整式の定義は問題**2**. **考え方**参照)

(2)(i)

> $f(x)$ を整式とする.
> $f(\alpha)=0 \iff f(x)=(x-\alpha)Q(x)$ （$Q(x)$ は整式）（因数定理）

を利用する.

別解として $\begin{cases} f(\alpha)=0 \\ f(\beta)=0 \\ f(\gamma)=0 \end{cases}$ を解くことでも証明できる.

(ii) $F(x)=f(x)-g(x)$ とおくと $F(x)$ は2次以下の整式となり(i)が利用できる.

(iii) 与式は整式ではないが分母を払うと左辺，右辺ともに2次以下となり(ii)が利用できる.

●解答●

(1) $\theta=0$ として $\sin 0=0$, $\cos 0=1$ より $b+c=0$. …①

$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ として $\sin\dfrac{\pi}{2}=1$, $\cos\dfrac{\pi}{2}=0$ より $a+c=0$. …②

$\theta=\pi$ として $\sin\pi=0$, $\cos\pi=-1$ より $-b+c=0$. …③

①, ②, ③ より $a=b=c=0$ が必要.

逆に，$a=b=c=0$ のとき

$a\sin\theta+b\cos\theta+c=0\cdot\sin\theta+0\cdot\cos\theta=0$ となりすべての θ に対して

$a\sin\theta+b\cos\theta+c=0$ が成り立つ.

以上から　$\boldsymbol{a=b=c=0}$.

(2)(i)　$f(x)=ax^2+bx+c$ とおく.

$f(\alpha)=0$ より $f(x)=(x-\alpha)Q_1(x)$（$Q_1(x)$ は1次以下の整式）とかける.（因数定理より）

$f(\beta)=(\beta-\alpha)Q_1(\beta)$. $f(\beta)=0$, $\beta\neq\alpha$ より　$Q_1(\beta)=0$

$Q_1(\beta)=a(x-\beta)$. ゆえに $f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$

$f(\gamma)=a(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)$. $f(\gamma)=0$, $\gamma\neq\alpha$, $\gamma\neq\beta$ より　$a=0$

ゆえに $f(x)=bx+c$

$f(\alpha)=0$ より　$f(x)=b(x-\alpha)$. $f(\beta)=b(\beta-\alpha)$.

$f(\beta)=0$, $\beta\neq\alpha$ より　$b=0$. ゆえに $f(x)=c$.

$f(\alpha)=c$, $f(\alpha)=0$ より　$c=0$. 以上から $\boldsymbol{a=b=c=0}$.

別解

$$\begin{cases} a\alpha^2+b\alpha+c=0 & \cdots① \\ a\beta^2+b\beta+c=0 & \cdots② \\ a\gamma^2+b\gamma+c=0 & \cdots③ \end{cases}$$

①−② より,

$$a(\alpha^2-\beta^2)+b(\alpha-\beta)=0$$
$$(\alpha-\beta)\{a(\alpha+\beta)+b\}=0$$

$\alpha\neq\beta$ より,

$$a(\alpha+\beta)+b=0 \qquad \cdots④$$

②−③ より,

$$a(\beta^2-\gamma^2)+b(\beta-\gamma)=0$$
$$(\beta-\gamma)\{a(\beta+\gamma)+b\}=0$$

$\beta\neq\gamma$ より,

$$a(\beta+\gamma)+b=0 \qquad \cdots⑤$$

④−⑤ より,

$$a(\alpha-\gamma)=0$$

$\alpha\neq\gamma$ より,

$$\boldsymbol{a=0}.$$

④ より,

$$\boldsymbol{b=0}.$$

① より,

$$\boldsymbol{c=0}.$$

■解説■

整式の恒等式についての条件をまとめておく．

> $f(x)=ax^2+bx+c$ とする．
> (p)　すべての x に対して $f(x)=0$ が成立する
> (q)　異なる3つの値 α，β，γ に対して $f(\alpha)=f(\beta)=f(\gamma)=0$ が成り立つ
> (r)　$a=b=c=0$
> (p)，(q)，(r) は互いに同値（必要十分条件）である．

(p)$\Longleftrightarrow$(r) は「係数比較法」，(p)$\Longleftrightarrow$(q) は「数値代入法」，として用いられ，(q)$\Longleftrightarrow$(p) は，$f(x)$ が整式で，**次数より多い異なる x の値**で $f(x)=0$ になるなら $f(x)=0$ が恒等的に成り立つことを表している．

証明は

$$(*)\quad \overset{(q)}{\not\Downarrow} \overset{(p)}{\Nwarrow} \overset{(r)}{\Rightarrow} \text{ を証明すれば } \begin{cases} (p)\Longleftrightarrow(q) \\ (p)\Longleftrightarrow(r) \\ (q)\Longleftrightarrow(r) \end{cases} \text{ がすべて証明できる．}$$

問題(2)(i)は(q)$\Rightarrow$(r)の証明である．

(p)$\Rightarrow$(q)の証明は(p)で $x=\alpha$，β，γ として(q)が証明できる．

(r)$\Rightarrow$(p)の証明は $ax^2+bx+c=0\cdot x^2+0\cdot x+0=0$ となりすべての x で成立する．

ゆえに (*) が証明できた．

2

考え方

> $f(x)$ が整式（多項式）とは
> $$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 \quad \left(\begin{array}{l} n \text{ は } 0 \text{ 以上の整数} \\ a_k \text{ は定数 } (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n) \end{array}\right)$$
> と表される式のことである．

($f(x)=\sqrt{3}\,x^2+x+\dfrac{1}{2}$，$f(x)=2$ などは整式だが，

$f(x)=\dfrac{1}{x}$，$f(x)=2^x$，$f(x)=\sin x$ などは整式ではない)

したがって，問題文にある条件 $x^3f\left(\dfrac{1}{x}\right)=-f(x)$ から $f(x)$ の次数が4次以上とすると $x^3f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ は整式でなくなり右辺の $-f(x)$ と等しくなることがない．(たとえば

目　次

第1章　数学のベースになる内容1（恒等式，整式，対称式中心）……2

第2章　数学のベースになる内容2（方程式，不等式中心）……6

第3章　数学のベースになる内容3（等式，不等式の証明中心）……12

第4章　指数・対数関数，三角関数中心……18

第5章　数列中心……26

第6章　整数中心……32

第7章　順列・組合せ，確率中心……34