本書の使い方

本書は「収録されている例題や重要例題」と「解説編」の 2 パートがあります。

◆微積についてある程度自信のある人…「収録されている例題や重要例題」のパートを見て,「重要例題」を自分で解いてみましょう。解いた後,「解説編」のパートをよく読み, 重要例題の自分の解き方は合っているのか, わかっていなかった部分はなかったのかを確認しましょう。

できていなかった問題は必ずできるまで繰り返し演習しましょう。

◆微積について苦手意識のある人…まず「解説編」のパートを読んでみましょう。数学はとにかく様々な性質（原理）や定理を理解しないと前には進めません。理解してから様々な例題の解説を読んで, 自分でも必ず一度解いてみましょう。そして,「重要例題」も考え方や解説をしっかり読み, こちらも自分で解いてみましょう。

一通りやり終えた後,「収録されている例題や重要例題」のパートだけを見て, 解説を見ないでもう一度解いてみましょう。できなかった問題は必ずできるまで繰り返しましょう。

★【参考】と書いてある部分は, もし難しいと感じたら最初は飛ばして読んでも構いません。ある程度理解が深まってから必ず再度読んでみましょう。

目次

第２章　数列の極限

主要例題

◆数列の極限の計算（次の数列の極限を求めよ）

・$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n-1}{3n^2+n+1}$　　・$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2n}-\sqrt{n+1})$　　・$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

・$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\cos n\pi}{n}$

・$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$

◆等比数列の極限の計算（次の数列の極限を求めよ）

・$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+2^{n-1}}{3^n+2^n}$　　・$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}}{r^n+2}$　（r は実数定数）

◆無限級数の計算

（次の無限級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ）

・$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$　　・$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cos\frac{n\pi}{2}$

・$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$　　・$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{4^n}$

〈～に収束する条件を考える〉

●重要例題２－１●

次の等式が成り立つように，定数 a の値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+an+1}-\sqrt{n^2+3n+1})=2$$

p. 063

〈二項定理とはさみうちの原理を利用する〉

●重要例題２－２●

n を自然数とする．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3^n}$ を求めよ．

p. 066

〈一般項を求めるのが難しい数列の極限〉

●重要例題２－３●

数列 $\{a_n\}$ は，$a_1=3$，$a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定められる．

(1)　すべての正の整数 n に対して $a_n>1$ が成り立つことを示せ．

(2)　すべての正の整数 n に対して $a_{n+1}-2<\dfrac{1}{4}(a_n-2)$ を示せ．

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ．

p. 067

〈無限等比級数が収束する条件を考える〉

●重要例題２－４●

x を実数とする．無限等比級数

$$x+x(1+x)+x(1+x)^2+\cdots$$

が収束するような x の値の範囲を求め，和を求めよ．

p. 074

§1　数列の極限を求める

例えば，$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{2n+1}=0$ となるが，$\lim_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n+1}$ はどうなるのだろうか？

$n\to\infty$ のとき $\dfrac{3n+1}{2n+1}$ は $\dfrac{\infty}{\infty}$ の形となりますが，$\dfrac{\infty}{\infty}$ は何になるのだろうか？ 分子と分母を約分して 1 にしてもいいのでしょうか？

∞ は「無限大」の記号なので数を表すものではないから，約分するのはダメそうですね。それでは，$\dfrac{3n+1}{2n+1}$ を変形して，$\dfrac{\infty}{\infty}$ の形をとらないように計算してみましょう。

$$\cdot \lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\dfrac{1}{n}}{2+\dfrac{1}{n}}$$

分子・分母を n で割った

$$=\frac{3+0}{2+0}$$

$$=\frac{3}{2}.$$

同様にして，次の 2 つの数列の極限も考えてみよう。これらも $\dfrac{\infty}{\infty}$ の形です。

$$\cdot \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\dfrac{1}{n}}{3+\dfrac{1}{n}}=\frac{2+0}{3+0}=\frac{2}{3}.$$

$$\cdot \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{n+1}=\lim_{n\to\infty}n=\infty.$$

このように，$\dfrac{\infty}{\infty}$ となっていくものは，みんなが同じ値になるとは限らないですし，さらに定数にならないこともあります。

実は，$\dfrac{\infty}{\infty}$ の形以外でも，$\infty-\infty$ の形や，$0\times\infty$ $(\infty\times 0)$ の形もこのままでは極限がどうなるのかわからないので，工夫して極限を求める必要があります

重要！

$\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めるとき，「与えられた a_n の式」で極限を考えたら

$$\boxed{\frac{\infty}{\infty},\quad \infty-\infty,\quad 0\times\infty} \quad \cdots (*)$$

となる場合，これを『不定形』といい，このままでは極限がどうなっているかはわからない!!

極限が（＊）とならないよう，「与えられた a_n の式」を変形してから計算するか，はさみうちの原理などで工夫して求めるようにしよう!!

以下のいろいろな数列の極限を求める例題をやってみましょう。なぜこのように変形をして求めたのかを意識して，できるまで練習しましょう。

例

$\boxed{\dfrac{\infty}{\infty}\text{ のタイプ}}$ ⇒ できるだけ ∞ をなくそう

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n-1}{3n^2+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\dfrac{3}{n}-\dfrac{1}{n^2}}{3+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}$$

分子・分母を n^2 で割った

$$=\frac{2+0+0}{3+0+0}$$

$$=\frac{2}{3}.$$

（注）

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n-1}{3n^2+n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3-\dfrac{1}{n}}{3n+1+\dfrac{1}{n}}$$

分子・分母を n で割った

$$=\frac{\infty}{\infty}\ ?$$

分子・分母を n で割った式で極限を考えた場合，分子・分母ともに ∞ が残るので不定形は消えません

「分母の最高次の項で分子・分母をわってから極限を求める」

ようにしてみましょう

例

$\boxed{\infty-\infty \text{ のタイプ}}$ ⇒ $\boxed{\infty \text{ を1つにするか，たし算を作るか}}$

① $$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2n}-\sqrt{n+1})=\lim_{n\to\infty}\left\{\sqrt{n}\left(\sqrt{2}-\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)\right\}=\infty.$$

n の最高次の項が異なる … くくり出せ！　　$\boxed{\infty\times(\sqrt{2}-\sqrt{1})}$

② $$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0.$$

n の最高次の項が同じのときは，くくると $\infty\times 0$ となるので，有理化と同じ方法で処理!!

分母・分子に $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ をかけた　　$\boxed{\dfrac{1}{\infty}}$

（注） $$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{1}\right)$$
$$=\infty\times(1-1)$$
$$=\infty\times 0 \text{（不定形）}$$

$\infty-\infty$ のタイプでは，上の例題のように「n の最高次の項」にまず着目しましょう
「n の最高次の項」が異なるときは①のやり方で，同じのときは②のやり方でやってみましょう

例

$\boxed{0\times\infty \text{ のタイプ}}$ ⇒ $\boxed{0 \text{ または } \infty \text{ を消す}}$

① $$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\cdot(2n^2+n)\right\}=\lim_{n\to\infty}(2n+1)=\infty$$ $\boxed{\infty+1}$

② $$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n^2}\cdot(2n^2+1)\right\}=\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n^2}\right)=2$$ $\boxed{2+0}$

③ $$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n^3}(2n^2+1)\right\}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}\right)=0$$ $\boxed{0+0}$

①，②，③はともに，$\dfrac{\infty}{\infty}$ の形（不定形）でもあるよ

例

$\boxed{\text{はさみうちの原理}}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\cos n\pi}{n}$ は

$$\begin{cases} -1\leqq\cos n\pi\leqq 1 \text{ より } -\dfrac{1}{n}\leqq\dfrac{\cos n\pi}{n}\leqq\dfrac{1}{n}, \\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0 \end{cases}$$

であるから，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos n\pi}{n}=0.$$

$\left(\cos\pi=-1,\ \cos 2\pi=1,\ \cos 3\pi=-1,\ \cos 4\pi=1\cdots\cdots\right.$ より，$\dfrac{\cos n\pi}{n}$ は $-\dfrac{1}{1},\ \dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{4}\cdots$ と“振動する”$\left.\right)$

分子が“振動する”数列の
極限ですが，分子は -1 か 1，
分母が限りなく大きくなっていく
ので，多分 0 に収束しそうですね
こういうときは，「はさみうちの原理」
で書くといいですよ

［（注）　$0\leqq\left|\dfrac{\cos n\pi}{n}\right|\leqq\dfrac{1}{n}$ であり

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ より，はさみうちの原理から

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\cos n\pi}{n}\right|=0.$$

よって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos n\pi}{n}=0.$$ ］

絶対値をうまく使って
はさんでもいいですよ

例

$\boxed{\dfrac{\infty}{\infty},\ 0\times\infty \text{ のタイプ 2}}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$$

$\dfrac{\infty}{\infty}$ の形

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}$$

分子と
分母を
n^2 で
割った

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}{1}$$

$$=\frac{1}{2}.$$

これを
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)$
$=0+0+\cdots+0+\cdots$
$=0$
とするのはいけません
「限りなく 0 に近いものを
限りなく加える」
ことになるので，$0\times\infty$ の形
と同じような不定形であると
考えましょう

●重要例題２－１●

次の等式が成り立つように，定数 a の値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+an+1}-\sqrt{n^2+3n+1})=2$$

考え方

$n\to\infty$ のとき，左辺の極限に $\infty-\infty$ の「不定形」が現れる．

最高次の項が同じなので，極限は分子・分母に $\sqrt{n^2+an+1}+\sqrt{n^2+3n+1}$ をかけてから計算し，その極限値が "2 に収束" する条件を考えてみよう．

解

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+an+1}-\sqrt{n^2+3n+1})$$

分子・分母
$\times(\sqrt{n^2+an+1}+\sqrt{n^2+3n+1})$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+an+1)-(n^2+3n+1)}{\sqrt{n^2+an+1}+\sqrt{n^2+3n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-3)n}{\sqrt{n^2+an+1}+\sqrt{n^2+3n+1}}$$

分子・分母ともに n があると，$\frac{\infty}{\infty}$ などの不定形となることがあるから，分子・分母を $n(=\sqrt{n^2})$ で割ってから考える

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a-3}{\sqrt{1+\frac{a}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}}$$

$$=\frac{a-3}{2}$$

$\to\dfrac{a-3}{\sqrt{1+0+0}+\sqrt{1+0+0}}$

である．

よって，$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+an+1}-\sqrt{n^2+3n+1})=2$ となる条件は

$$\frac{a-3}{2}=2$$

より

$$a=7$$

である．