数学の力を伸ばしたい皆さんへ

先日，予備校の同僚講師と食事に行きました．数ヶ月先まで予約が入っているという，とても人気のあるお店です．小さな店内はカウンター席のみで，料理の味だけではなく，目の前で調理の様子を見られることも，人気の理由のようです．
調理の様子を見ていたのですが，包丁だけでも何本もあり，料理によって様々な鍋やフライパンを使い分け，鮮やかな手際で料理を仕上げていく様子は，まさに一流の料理人の仕事でした．そして，「数学も料理も同じだね」と同僚と話しながら最高の料理を楽しみました．

「数学も料理も同じ」とはどういうことでしょうか？
料理を作るためには，包丁や鍋といった道具，そしていろいろな調味料が必要です．数学の問題を解くためには，いろいろな公式や定理といった「道具」が必要です．
料理をおいしく作るためには，道具を使いこなす技術が必要です．そして，どういう調味料をどのように使えば最高の味になるかを考えながら料理を仕上げていくのでしょう．もちろん，厳しい修行に耐えて技術を磨くことも必要でしょう．
数学の問題を解くためには，公式や定理を状況に応じて使いこなす「技術」が必要です．いくつかの解法が存在する場合には，最適な解法を選ぶ力も必要です．また，様々な問題を演習することで，複雑な設定の問題も論理的に分析して解くことができるようになり，本番での実戦力を向上させることができます．

数学の力を伸ばしていくコツはもう分かりましたか？
まず，「道具」を手に入れましょう．公式を覚えたり，それらの典型的な使い方を身につけることです．基本を疎かにしてはいけません．
道具を手に入れたら，道具を使う「技術」を向上させる段階に進みます．例えば，「相加平均と相乗平均の大小関係は覚えたが，どのような場面で何に注意して使うのか？」，「面積は定積分で計算できることは分かったが，計算量を減らす工夫はないのか？」といったことです．本書『文系の数学　実戦力向上編』は，この部分に狙いを絞り，入試本番で差のつくテーマ 97 題を厳選し，詳しく解説しています．
さらに，習得した技術を磨き上げるための演習問題を，巻末に載せてあります．これを演習することで，より自信をもって問題を解くことができるようになるでしょう．

数学は粘り強く勉強することが大切です．安易な暗記を行わず，理解を深めましょう．難しいテーマや経験したことのない問題がいくつも出てくると思いますが，焦らずにじっくりと取り組んでください．本書をやり終えたとき，皆さんの「問題を解く力」は確実に伸びていることでしょう．

目　次

■　数と式を中心にして

■　整数を中心にして

■　２次関数，三角関数，指数，対数を中心にして

■ 図形と式を中心にして

■ 微分法，積分法を中心にして

■ 三角比，ベクトルを中心にして

■ 数列を中心にして

89 確率の最大値

n を 2 以上の整数とし，袋の中に，白玉が 5 個，赤玉が n 個入っているとする．この袋から 2 個の玉を同時に取り出すとき，取り出した玉が白玉と赤玉 1 個ずつである確率を p_n とする．p_n が最大になる n の値と，そのときの p_n の値を求めよ． （福井大）

解答

白玉 5 個と赤玉 n 個の合計 $n+5$ 個の中から，2 個の玉を取り出す取り出し方は全部で ${}_{n+5}\mathrm{C}_2$ 通りあり，白玉 1 個と赤玉 1 個を取り出す確率が p_n であるから，

$$p_n=\frac{{}_5\mathrm{C}_1\times{}_n\mathrm{C}_1}{{}_{n+5}\mathrm{C}_2}$$

☜ すべての玉は，区別して考える

$$=\frac{5\times n}{\dfrac{(n+5)(n+4)}{2\cdot 1}}=\frac{10n}{(n+5)(n+4)}\ (n\geqq 2)\qquad\cdots①$$

①を用いると，

$$\frac{p_{n+1}}{p_n}=\frac{10(n+1)}{(n+6)(n+5)}\cdot\frac{(n+5)(n+4)}{10n}$$

$$=\frac{(n+1)(n+4)}{(n+6)n}$$

①において，n を $n+1$ にすると，
$$p_{n+1}=\frac{10(n+1)}{(n+6)(n+5)}$$
☜ であり，これを用いて，
$$\frac{p_{n+1}}{p_n}=p_{n+1}\times\frac{1}{p_n}\left(\frac{1}{p_n}\text{ は } p_n \text{ の逆数}\right)$$
と計算している

ここで，$p_n\leqq p_{n+1}$，すなわち，$\dfrac{p_{n+1}}{p_n}\geqq 1$ が成り立つ n の範囲を求めると，

☜ $p_n>0$ であるから，両辺を p_n で割っても不等号の向きは変わらない

$$\frac{(n+1)(n+4)}{(n+6)n}\geqq 1$$

$$(n+1)(n+4)\geqq(n+6)n$$

☜ $n\geqq 2$ より $(n+6)n$ は正であるから，両辺に $(n+6)n$ を掛けて分母を払っても不等号の向きは変わらない

$$n^2+5n+4\geqq n^2+6n$$

$$n\leqq 4$$

☜ これより，$n=4$ のときには，$\dfrac{p_{n+1}}{p_n}=1$ となることも分かる

これより，

$$\begin{cases} n=2,\ 3 \text{ のときに，} & \dfrac{p_{n+1}}{p_n}>1,\ \text{すなわち，}\ p_n<p_{n+1} \\ n=4 \text{ のときに，} & \dfrac{p_{n+1}}{p_n}=1,\ \text{すなわち，}\ p_n=p_{n+1} \\ n=5,\ 6,\ \cdots \text{ のときに，} & \dfrac{p_{n+1}}{p_n}<1,\ \text{すなわち，}\ p_n>p_{n+1} \end{cases}$$

が成り立つことが分かるから，

$$p_2<p_3<p_4=p_5>p_6>p_7>\cdots\qquad\cdots②$$

となる．

☜ これより，p_2 から p_4 まで増加して，p_4 と p_5 は等しく，p_5 から先は減少し続けることが分かる

②より，p_n が最大になる n の値は，

$$\boldsymbol{n=4,\ 5}$$

また，最大になるときの p_n の値は，①で $n=4$（または $n=5$）として，

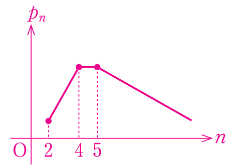
$$p_4(=p_5)=\frac{10\cdot 4}{(4+5)(4+4)}=\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{9}}$$

☜ **最大値は p_5 を計算してもよく，**

$$p_5=\frac{10\cdot 5}{(5+5)(5+4)}=\frac{5}{9}$$

となる．

また，本問では p_n の変化は次のようになっている



＜補足：$n\leqq 4$ を求める部分について＞

$p_n\leqq p_{n+1}$ が成り立つ n の範囲は，次のように計算してもよい．①を用いると，

$$\begin{aligned}p_{n+1}-p_n&=\frac{10(n+1)}{(n+6)(n+5)}-\frac{10n}{(n+5)(n+4)}\\&=\frac{10(n+1)(n+4)-10n(n+6)}{(n+6)(n+5)(n+4)}\\&=\frac{10(4-n)}{(n+6)(n+5)(n+4)}\end{aligned}$$

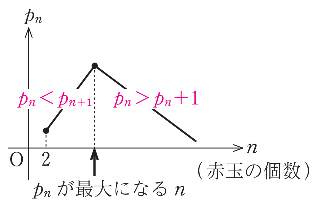
これより，$p_n\leqq p_{n+1}$ すなわち，$p_{n+1}-p_n\geqq 0$ が成り立つ n の範囲は，

$$4-n\geqq 0$$

となるときであり，$n\leqq 4$ と求められる．

解説講義

本問の出題者の要求は「2 個の玉を取り出したときに，白と赤が 1 個ずつ出る確率が最も大きくなるような赤玉の状況を考えよ」ということである．白玉の個数は 5 個で固定されているから，もし「白玉 5 個と赤玉 100 個」から 2 個の玉を取り出したら，2 個とも赤である可能性が高く，白と赤が 1 個ずつ出る確率は大きくないだろう．逆に「白玉 5 個と赤玉 2 個」から 2 個の玉を取り出したら，2 個とも白である可能性が高く，やはり，白と赤が 1 個ずつ出る確率は大きくないだろう．このように考えると，白と赤が 1 個ずつ出る確率が最も大きくなるのは「白玉 5 個と赤玉 5 個（つまり，白と赤が均等な状態）」の場合ではないかと考えることが自然だろう．



以上のことから，p_n の値の変化していく様子をグラフにしてみると，上の図のような感じになると予想される．つまり，n を大きくしていくと，p_n はあるところまで増加して最大となり，その後は減少し続けると思われる．そこで，p_n が増加する n の範囲を捉えるために，「$p_n\leqq p_{n+1}$」が成り立つ n の範囲を求める．$p_n\leqq p_{n+1}$ は，$\dfrac{p_{n+1}}{p_n}\geqq 1$ や $p_{n+1}-p_n\geqq 0$ と変形できるので，これらを解いて n の範囲を求めればよい．そして，その結果から解答の②式を得ることができるので，p_n が最大になる状況を発見できる．（本問は $n=4$ のときに $p_n\leqq p_{n+1}$ の等号が成り立って $p_4=p_5$ となるので，最大になる n が 2 つある）

p_n を表す式がグラフが描けるような易しい式になる場合はほとんどないので，「**$p_n\leqq p_{n+1}$ が成り立つ n の範囲を求めて，p_n の増減を調べる**」という解法を覚えておこう．

文系数学の**必勝**ポイント

確率の最大値

「$p_n\leqq p_{n+1}$」が成り立つ n の範囲を求めて，p_n の増減を調べる

Review! 微分法，積分法

1 接線の取り扱い 46

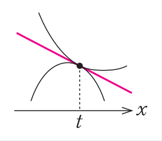
接点が不明な場合は，接点を $(t,\ f(t))$ とおいて接線の方程式を準備し，条件を満たす t を求める．

2 x 座標が t の点で共通接線が引ける 46

x 座標が t の点において，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共通接線が引けるときは，

$$f(t)=g(t) \quad かつ \quad f'(t)=g'(t)$$

が成り立つことに注目して考える．



3 3次関数の最大最小 47

「極値」と「定義域の端の値」に注目する．

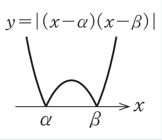
4 定積分で定められる関数 50

積分区間に x がないタイプは，$\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt=k$ とおく．

積分区間に x があるタイプは，x で微分して，$\displaystyle\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$ であることを利用する．

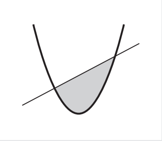
5 絶対値を含む関数の定積分 51

範囲に応じて適切に絶対値を外して積分する．文字を含む問題では，グラフを描いて，“折り返し”のところが積分区間に含まれるかどうか，に注目して場合分けを行う．



6 放物線と直線，2つの放物線で単純に囲まれた部分の面積 52

「6分の1公式」を使って計算する．
これ以外にも「6分の1公式」が使える場面はあり，その1つが「3次関数の極大値と極小値の差」を計算するときである．



演　習　問　題
解　答・解　説

1

比例式であるから，「$=k$」とおいて考える．「この式の値を求めよ」というのは，与えられた式の値を要求されているので，k の値を求めればよい．

$$\frac{x}{3(y+z)}=\frac{y}{3(z+x)}=\frac{z}{3(x+y)}=k$$

とおくと，

$$\begin{cases} x=3(y+z)k & \cdots① \\ y=3(z+x)k & \cdots② \\ z=3(x+y)k & \cdots③ \end{cases}$$

①＋②＋③ より，

$$x+y+z=6(x+y+z)k \quad \cdots④$$

(ア)　$x+y+z\neq 0$ のとき，④から，

$$k=\frac{x+y+z}{6(x+y+z)}=\frac{1}{6}$$

このとき，①，②，③より，$x=y=z$ である．

(イ)　$x+y+z=0$ のとき，$y+z=-x$ であり，

$$k=\frac{x}{3(y+z)}=\frac{x}{3(-x)}=-\frac{1}{3}$$

(ア)，(イ)より，求める式の値は，

$$\mathbf{\frac{1}{6},\ -\frac{1}{3}}$$

<補足>

④を整理して，因数分解すると，

$$(6k-1)(x+y+z)=0$$

となる．よって，

$$6k-1=0 \text{ または } x+y+z=0$$

となるので，ここから，(ア)，(イ)の 2 つの場合について考えてもよい．

2

4 (2)のタイプである．余りを ax^2+bx+c とおいただけでは解けない．余りを $a(x+1)^2+2x+1$ と設定して考えるか，$f(x)$ を $(x+1)^2$ で割った商に手を加えるかのやり方で解く．4 (2)の解法が身についているかを確認しよう．

整式 $f(x)$ を $(x+1)^2$，$(x-1)^2$ で割った商を $Q_1(x)$，$Q_2(x)$ とすると，

$$f(x)=(x+1)^2Q_1(x)+2x+1 \quad \cdots①$$
$$f(x)=(x-1)^2Q_2(x)+x+6 \quad \cdots②$$

が成り立つ．②で $x=1$ にすると，

$$f(1)=7$$

である．

$f(x)$ を $(x+1)^2(x-1)$ で割った商を $Q_3(x)$，余りを ax^2+bx+c とすると，

$$f(x)=(x+1)^2(x-1)Q_3(x)+ax^2+bx+c \cdots③$$

となる．このとき，$f(x)$ を $(x+1)^2$ で割った余りが $2x+1$ であることより，

$$ax^2+bx+c \text{ は，} a(x+1)^2+2x+1$$

と表すことができるので，③は，

$$f(x)=(x+1)^2(x-1)Q_3(x)+a(x+1)^2+2x+1 \quad \cdots④$$

となる．

④で $x=1$ にすると，

$$f(1)=a(1+1)^2+2\cdot 1+1$$
$$=4a+3$$

となり，$f(1)=7$ であるから，

$$4a+3=7$$
$$a=1$$

したがって，求める余りは，

$$1\cdot(x+1)^2+2x+1=\boldsymbol{x^2+4x+2}$$

<別解：①の $Q_1(x)$ を変形する>

①において，$Q_1(x)$ を $x-1$ で割った商を $Q_4(x)$，余りを d とすると，

$$f(x)=(x+1)^2\{(x-1)Q_4(x)+d\}+2x+1$$
$$=(x+1)^2(x-1)Q_4(x)+d(x+1)^2+2x+1 \quad \cdots⑤$$