はじめに

大学入試数学における整数分野の問題は，その解答を見れば，「なんだこんな簡単な話か」というものであっても，初見時には着手しどころがまるで判らない（言い換えると経験値がものを言う）問題が多い．

かてて加えて高校の授業ではこの分野は殆ど扱われないにもかかわらず，入試では頻出で，しかも教科書の問題と入試ではそのレベルの乖離の最も激しい分野の一つである．

しかしながら，大学入試における整数問題に限った判り易い参考書や手ごろな問題集が市場に出まわっていない．

この状況を踏まえて，

①　ここ数十年の大学入試約1000題の整数問題を分析，分類，取捨選択し，

②　参考書部分　＋　問題集部分　に構成し，

③　高校までに学んだ知識だけで理解できる解説をし，解答例を作成し，

④　後は各自の志望大学で出たことのある整数問題のチェックだけで済む

ことを目指した「これだけでよい」という本をつくった．

参考書部分の各講は，

頻出かつ重要な問題の例題とその解答，解説　＋　例題の類題

のセットで構成されており，この類題の解答は次の問題集部分にある問題の解答と併せて別冊子としてある．尚，講の並びについては，その数学的内容のみならず，見た目の類似性も考え併せて配置した．また，例題だからといって易しいとはかぎらないから，覚悟して学習して欲しい．

問題集部分には，やや難しい**力だめし問題**を25題用意してあり，これで参考書部分の学習の理解の程度を確認できるようになっている．

類題，力だめし問題を問わず，問題文の理解，解法の習得が難しいであろうものには，†（ダガーマーク）を付けておいた．20分程度戦っても解決を見ない様なら，解答を見てしまうのも一手だと思う．

おことわり

学習途中で,「この問題, 前の問題ととてもよく似ているのに全く違う解き方をしている」とか,「この解法, 確か前にもあった」と感じることが何度もあることと思う. 更には,「一つの問題についてはbestの解法だけ学べば(暗記すれば)いいのに, 何故, こんなにも別解を載せるのか」と不満に思う読者も出て来るに違いない.

正に, それが筆者の狙うところであって,

- **一つの問題に色々なアプローチ, 工夫を試みること,**
- **一つの工夫の仕方が多くの問題解決に適用できることを知ること**

が試験場での**行き詰まりの打開力**につながると考えているからである.

また,「整数」がメインテーマの問題であるが, 解くためには「整数の性質」の単元以外の知識が必要な問題も結構多い.

例えば, 平面図形と方程式や不等式, 三角関数, 指数関数, 対数関数, 数列, 順列と組合せ, 二項定理, ベクトル, 微分, 積分, 二次曲線　等々.

この場合, 既習でないと難しい場合もあるだろう. 現役生は, その単元を履修した後にまたその問題に戻って再度挑戦して欲しい.

尚, 問題文の表現を原典から変更した場合であっても, その解答が元と全く同じでよいときや穴埋め問題を論述式問題に変更しただけのとき, その出典を一々「○○大・改」とはしなかった.

また, 頻出の問題ばかりを選んだのだから当たり前であるが, その類題の総ての出典を挙げると煩雑になるから, これについてはスペースが許す程度にとどめた.

この本のすべての解答例は,

「大学合格後は整数問題に二度と出遭うことの無いであろう受験生」

であっても読めるよう易しく(しかしながら冗長にならない程度に)書いた. したがって, 入試の際はここまで詳しく書かなくとも満点をとれるだろう.

尚, 答案をスッキリとさせる為に次の意味を持つ記号を用いた.

$\therefore$　(それ故に, したがって, よって, だから, therefore)

$\because$　(なぜならば, because)

目　次

第 1 章　基本的用語の確認

(i)　数の分類

自然数（正の整数）
0　　　整数
負の整数
　　　　　　有理数
整数以外の分数
（有限小数 or 循環小数）
　　　　　　　　　　実数
無理数
（循環しない無限小数）　　複素数
虚数

自然数（正の整数）$1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ と 0 と負の整数 $-1,\ -2,\ -3,\ \cdots$ を併せて整数という．

また，

$$\frac{q}{p}\quad (p,\ q \text{ は整数で，} p \neq 0)$$

の形に表せる数を有理数という．

$$\left(\frac{1}{3},\ 2=\frac{2}{1},\ 0.75=\frac{3}{4},\ -0.1=\frac{-1}{10} \text{ は有理数である} \right)$$

有理数を小数で表すと，

$\dfrac{1}{8}=0.125$ のように有限小数となるものと，

$\dfrac{1}{3}=0.333\cdots=0.\dot{3}$ や $\dfrac{2}{7}=0.285714285714\cdots=0.\dot{2}8571\dot{4}$

のように循環小数となるものがある．

循環しない無限小数を無理数という．

$\sqrt{2}=1.4142\cdots,\ \pi=3.1415\cdots,\ e=2.7182\cdots$ は無理数である．
$\sqrt{2}$ が無理数であることの証明は例題 18 の解法メモを参照

有理数と無理数を併せて実数という．

類題 1

$$\left.\begin{array}{r} a \text{ は自然数,} \\ p,\ q \text{ は正の奇数.} \end{array}\right\} \quad \cdots ①$$

$$2^a + p^2 = q^4. \quad \cdots ②$$

(1) ② から,

$$q^4 - p^2 = 2^a.$$

$$\therefore \quad (q^2 + p)(q^2 - p) = 2^a.$$

ここで, ① から, $q^2 + p$, $q^2 - p$ は共に偶数で, $q^2 + p > q^2 - p$ 故,

$$\begin{cases} q^2 + p = 2^k, \\ q^2 - p = 2^l \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} k,\ l \text{ は自然数で,} \\ k > l,\ k + l = a \end{array}\right) \quad \cdots ③$$

とおける.

(その 1)

③ から,

$$\begin{aligned} 2q^2 &= 2^k + 2^l \\ &= 2^l(2^{k-l} + 1). \end{aligned}$$

$$\therefore \quad q^2 = 2^{l-1}(2^{k-l} + 1).$$

よって, 2^{l-1} は奇数 q^2 の約数だから,

$$l = 1.$$

これを ③ へ代入して,

$$q^2 - p = 2.$$

(その 2)

③ から,

$$2p = 2^k - 2^l. \quad \therefore \quad p = 2^{k-1} - 2^{l-1}.$$

ここで, $l \geqq 2$ とすると, ③ から, 2^{k-1}, 2^{l-1} が共に偶数となり, p が奇数であることに反する.

$$\therefore \quad l = 1.$$

これを ③ へ代入して,

$$q^2 - p = 2.$$

(2) (1) で示したことから,

$$\begin{cases} q^2 + p = 2^{a-1}, & \cdots ④ \\ q^2 - p = 2. & \cdots ⑤ \end{cases}$$

$\dfrac{④ + ⑤}{2}$ から,

$$q^2 = 2^{a-2} + 1.$$