# 目の前の１題を成長のチャンスに

この問題集は，2020年度に行われた全国の大学入試問題に目を通し，その中から2021年度入試において役立ち，解くことによって，得るものが多いと思われる問題を基本的なものから発展的なものまで幅広く厳選して収録しています．各問題の解答は，練習を積めば受験生が試験場でも思いつきやすい標準的な解法を心掛けました．さらに，今後の学習につながるように，必要に応じて方針，別解，注，参考をつけています．今まで磨いてきた自分の数学力を試す材料として，夏以降の実戦的な力を身につけるための対策として，また，過去問に挑戦するまでに行う弱点補強として，是非活用してください．

その結果，2021年度入試が，日々，鍛え上げてきた数学力を試せる最高の舞台となるように，最大のエールを込めてこの問題集を贈ります．

河合塾　数学科

（注）

・問題編はとりはずしが可能な別冊になっています．解答と照らし合わせて考えたいときに活用してください．

・問題番号の左上に＊印のついた問題は，実際の入試に若干の修正を加えています（穴埋め→記述式の変更も含む）．また，データの分析（数学Ⅰ），整数（数学Ａ）は数学Ⅱ，Ｂの知識を必要とする問題が多いため，そのような問題には問題番号の左下に△印をつけています．

# 本書を用いての学習アドバイス

**利用法1**　本番の入試のつもりで先入観を持たずに時間を計って解く．

復習のときに次のページに書かれている各問題のテーマを参考にして，自分が持っている参考書などで理解を深めていくとよいでしょう．

**利用法2**　基本的な問題から始め，応用，発展へとつなげていく．

各問題に対して，次のページで大まかな目安をつけています．

**◆　「その分野の基本的な発想・知識・計算技術を学ぶのに適した問題」**

入試までに，確実に身につけたい基本事項が詰まった問題です．自分の力で完答できるまで，何度も繰り返し練習しましょう．

**◆◆　「融合色のある実戦的な問題や，有名なテーマの問題」**

入試において，合否を決める問題です．中には，例年よく出題される，経験のあるなしで大きな差となる問題も含まれています．各分野で学んだ基本事項をどのように応用していけばよいか，問題演習を通して吸収しましょう．

**◆◆◆「思考力を鍛える問題や，高度な技法を用いる問題」**

難関大学の入試において差のつく問題です．なかには，受験勉強の総仕上げにふさわしい難問も含まれています．すぐに答えを見るのではなく時間をかけて自分自身で解法の糸口を見つける訓練をしましょう．

ただし，◆が少ない問題が必ずしも簡単というわけではないので注意してください．

# 収録問題の概要

記号◆の意味については前ページを参照してください．
記号の隣に書かれている事柄は各問題のテーマです．この問題集の１題から広げて，自分が使ってきたテキスト・参考書などで復習し，問題ごとのつながりを考えることで，理解を深め，次の一題につなげてください．

**数学Ⅰ**

**1**◆ 整数部分と小数部分
**2**◆ 絶対値を含む不等式
**3**◆ ２次関数の平行移動
**4**◆ ２次関数の最大値
**5**◆◆ ２次不等式
**6**◆ ２次方程式の解の位置
**7**◆ 置き換えて２次関数を扱う
**8**◆◆ 絶対値を含む関数のグラフ
**9**◆◆ ガウス記号を含む関数
**10**◆ 三角形の内接円の半径
**11**◆ 三角形の外接円の半径
**12**◆◆ 円に内接する四角形
**13**◆◆ 四面体の展開図，外接球
**14**◆ データの分析，相関係数
**15**◆◆ データから作られる関数

**数学Ａ**

**16**◆ ３つの集合，包除原理
**17**◆ 条件を満たす整数の総数
**18**◆ 最短経路の個数
**19**◆ 重複組み合わせ
**20**◆ 円順列
**21**◆◆◆ ラテン方陣
**22**◆ 球を取り出す確率
**23**◆ 最大値・最小値の確率
**24**◆◆ さいころと確率
**25**◆ じゃんけんと確率
**26**◆ 点の移動と反復試行
**27**◆◆ ２チームの対戦と反復試行
**28**◆ 条件付き確率
**29**◆◆ 確率の差の最小
**30**◆ 平面図形と色々な定理
**31**◆ 正の約数の個数
**32**◆ １次不定方程式の解法
**33**◆ 方程式の整数解
**34**◆ 約数の利用
**35**◆ 倍数の証明
**36**◆◆ 剰余の周期性
**37**◆◆◆ 整数と論証問題

## 数学Ⅱ

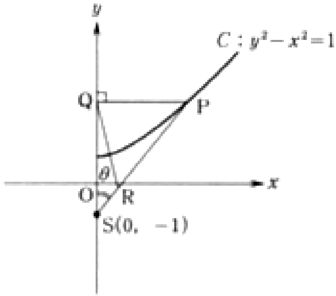
38◆　多項定理，整式の除法
39◆　不等式の証明
40◆◆　整式の決定
41◆◆◆　合成関数を含む方程式
42◆　高次方程式と共通解
43◆　解と係数の関係
44◆◆　置き換えと解の対応関係
45◆◆◆　３次方程式の作成
46◆　円と直線の位置関係
47◆◆　２円の位置関係
48◆◆　放物線と円の位置関係
49◆　放物線の頂点の軌跡
50◆◆　反転
51◆　領域における最大・最小
52◆◆◆　２直線のなす角
53◆　三角関数の最小値，合成
54◆◆　三角関数を含む不等式
55◆◆　三角関数の図形への応用
56◆◆◆　三角関数と整式の融合問題
57◆　指数関数を含む不等式
58◆　指数関数の最大値
59◆　対数を含む方程式
60◆　対数関数と置き換えの利用
61◆　常用対数の利用，文章題
62◆　桁数，最高位の数字
63◆◆　対数を含む不等式の応用
64◆　３次関数が極値をもつ条件
65◆　３次関数の最大・最小
66◆　置き換えの利用と３次関数
67◆◆　３次関数の図形への応用
68◆◆　微分法の方程式への応用
69◆◆　微分法の不等式への応用
70◆◆　曲線外の点から接線を引く
71◆　定積分を含む関数の決定
72◆　共通接線，放物線と面積
73◆◆　円と放物線に関する面積
74◆◆　面積の最大値
75◆◆　絶対値を含む関数と面積
76◆◆　３次関数に関する面積
77◆◆　４次関数に関する面積

## 数学Ｂ

## 数学Ⅲ

115◆　極方程式
116◆◆　双曲線の媒介変数表示
117◆　楕円の性質
118◆　楕円と直線の位置関係
119◆◆◆楕円の準円
120◆　逆関数，合成関数
121◆　等式を満たす複素数
122◆◆　複素数の和と無限級数
123◆◆　ド・モアブルの定理
124◆　複素数の回転・拡大
125◆◆　解が複素数平面上で正三角形を作る条件
126◆◆　複素数平面上の点列
127◆◆　複素数平面上での軌跡
128◆◆　複素数平面上での軌跡，三角関数の極限
129◆◆◆複素数平面の図形への応用
130◆◆　無限級数
131◆◆　漸化式と極限
132◆◆◆はさみうちの原理
133◆◆◆図形と関数の極限
134◆◆◆数列が収束する条件
135◆◆◆抽象関数，微分可能
136◆　接線の本数
137◆◆　微分法の図形への応用
138◆◆　対数微分法，グラフの概形
139◆◆　正多角形への微分法の応用
140◆◆　円の中心の座標の極小値
141◆◆　媒介変数表示と面積
142◆　曲線と直線に関する面積
143◆　面積と極限
144◆◆　絶対値を含む関数の定積分
145◆　定積分を含む関数の決定
146◆◆　定積分と漸化式，弧長
147◆　回転体の体積
148◆◆　斜軸まわりの回転体
149◆◆　媒介変数表示と体積
150◆◆　座標の導入と体積
151◆◆　直円柱に関する体積
152◆◆　図形と区分求積法
153◆◆　減衰曲線，部分積分法
154◆◆◆定積分と不等式
155◆　サイクロイドの長さ，面積
156◆◆　水の問題

# 116




(1)　P の $x$ 座標が 1 になるとき，P$(1,\ \sqrt{2})$ であるから，

$$\tan\theta_1=\frac{\mathrm{QP}}{\mathrm{QS}}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1.$$

よって，

$$\tan 2\theta_1=\frac{2\tan\theta_1}{1-\tan^2\theta_1}=\frac{2(\sqrt{2}-1)}{1-(\sqrt{2}-1)^2}=\mathbf{1}.$$

△PQR が正三角形になるとき，

$\angle\mathrm{SPQ}=\frac{\pi}{3}$ より，$\theta_2=\frac{\pi}{6}$.

よって，

$$\tan 2\theta_2=\tan\frac{\pi}{3}=\boldsymbol{\sqrt{3}}.$$

(2)　SP$=l$ $(l>0)$ とおくと，

$$\mathrm{QP}=l\sin\theta,\quad \mathrm{QS}=l\cos\theta$$

より，

$$\mathrm{P}(l\sin\theta,\ l\cos\theta-1)$$

と表せる．

P は $C$ 上の点なので，

$$(l\cos\theta-1)^2-(l\sin\theta)^2=1.$$

$$l^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)-2l\cos\theta=0.$$

$l>0$ であるから，

$$l\cos 2\theta=2\cos\theta$$

$\theta=\frac{\pi}{4}$ は，この式を満たさないので，

$\cos 2\theta\neq 0$ であり，

$$l=\frac{2\cos\theta}{\cos 2\theta}.$$

よって，

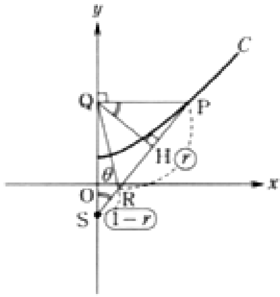
$$l\sin\theta=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos 2\theta}=\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta},$$

$$l\cos\theta-1=\frac{2\cos^2\theta}{\cos 2\theta}-1=\frac{1}{\cos 2\theta}$$

であるから，P の座標は，

$$\left(\boldsymbol{\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta},\ \frac{1}{\cos 2\theta}}\right).$$

(3)




Q から直線 PS に下ろした垂線の足を H とする．△PQR は QR＝QP の二等辺三角形であるから，H は線分 PR の中点である．

∠PQH$=\theta$ であるから，(2) の $l$ を用いると，

$$\mathrm{PH}=\mathrm{QP}\sin\theta=l\sin^2\theta$$

と表せる．

PR＝2PH であるから，

$$r=\frac{\mathrm{PR}}{\mathrm{PS}}=\frac{2l\sin^2\theta}{l}=2\sin^2\theta=\mathbf{1-\cos 2\theta}.$$

(4)　$$\overrightarrow{\mathrm{SR}}=(1-r)\overrightarrow{\mathrm{SP}}=(\cos 2\theta)\left(\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta},\ \frac{1}{\cos 2\theta}+1\right)=(\sin 2\theta,\ 1+\cos 2\theta)$$

であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OS}}+\overrightarrow{\mathrm{SR}}=(\sin 2\theta,\ \cos 2\theta)$$

より，R の座標は，

$$(\boldsymbol{\sin 2\theta,\ \cos 2\theta}).$$

直線 $y=x$ は $C$ の漸近線であり，$y$ 軸正