はじめに

高校の教科書で扱われている数学の内容は概念的に難しいものは少なく，一つ一つを丁寧に理解していけばよいのですが，教科書に掲載されている練習問題は少なく，自分がどのくらい理解したのか測るには十分な量ではありません．また，類題などの練習問題を解くことで，その内容を初めて理解できたり，さらに理解が深まったりすることもよくあります．

実際に大学入試で出題される問題は，単独の分野からの出題であったとしても，いくつかの項目(例えば，複数の公式を組み合わせる)が必要な問題であったり，複数の分野にまたがる内容からなる，いわゆる融合問題がその大半を占めます．そのような問題を分析・考察し，解答を作成するには，教科書で学習した内容を自分の頭の中で有機的に結びつけるネットワークの構築が必要であり，問題を解く際にはそのネットワークを最大限に利用して，過去に学習した内容からなるデータベースから必要な考え方や，解答の方針を探し出す作業を行うことになります．

そこで，この問題集は教科書の内容を一通り終え，これから本格的な受験勉強を進めていこうと考えている受験生が自学自習することを想定して，**教科書レベルの力から入試問題攻略に向けての力をつける橋渡しをする**ことを目的として編集しました．

具体的には，教科書の単元にこだわることなく，実際に解法を理解するときに最も効率がよいと思われる順番で教科書の内容を構成し直し，絶対にマスターしなければならない内容，つまり入試で

「この分野ではここが大切！」「これができなければ合格しない！」

という内容の問題を集め，それらを学習すべき順番に並べました．

また，扱う問題数についてはできる限り絞り込み，**「教科書で学習した内容を確認し，実際の入試問題を解答するために必要な事柄をまとめ，標準的な入試問題を解くことができる」**ことを目指しました．

この問題集を仕上げることで，入試問題を解くために必要な「礎」を築き上げることができます．この問題集から入試に向けて

START DASH !!

本書の特徴と使い方

本書の構成は次の通りです．

第１章　基本の確認 … この問題集で扱う内容について必要な事項を，定義・公式を中心にまとめてあります．理解の助けになるように具体例も掲載しています．一つ一つの内容について自分の手を動かして確認しながら読み進めてください．

第２章　重要テーマのまとめ … 重要テーマごとに典型問題の解法の確認をします．

例題と問題で一つのテーマが完成します．

例題を解き，内容を理解したら問題を自分の力だけで解いてみてください．

最初はゆっくりでよいので確実に！

問題の解答は別冊の解答編に掲載してあります．答え合わせをして次のテーマに進みましょう．

第３章　易しい入試問題 … 出題内容が明確な入試問題を掲載しています．必要に応じて，HINT を掲載しています．有効に利用してください．

第４章　標準的な入試問題 … 国公立２次・私大試験での出題を想定して教科書に掲載されていない内容(であっても必要なもの)や，複数分野の融合問題などを掲載しています．

すべての読者は第１章から順番に学習を進めてください．

教科書以外の問題を初めて解く読者は，第３章まで終了したら「**ひとまず完成！**」です．

本格的な受験勉強を意識したら，第４章の問題に挑戦してください．

もくじ

8　最大・最小

まず，最大値，最小値について確認しておきましょう．

> ある区間で関数 $f(x)$ を考えるとき，この区間のある値 a が，この区間の
> **すべての x に対して** $f(x) \leqq f(a)$ を満たすとき，$f(a)$ を**最大値**という．
> **すべての x に対して** $f(x) \geqq f(a)$ を満たすとき，$f(a)$ を**最小値**という．

関数 $f(x)$ の最大値，最小値の候補は，

「極大値」，「極小値」，（定義域の端が含まれるなら）「定義域の端での値」

です．したがって，定義域内で増減表をかけば，最大値，最小値がわかります．

では，いくつか例を挙げてみましょう．前セクションと同じく「増減表の書き方」の例にもなっているので，そちらにも注意して読んでください．

■　$f(x)=x-2\sin x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ の最大値，最小値を求めてみましょう．

$$f'(x)=1-2\cos x=2\left(\frac{1}{2}-\cos x\right)$$

ですが，この $f'(x)$ の符号はどうやって判定しましょう．

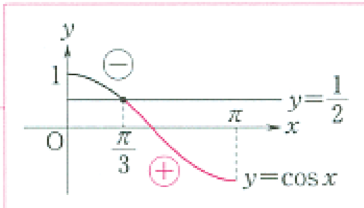
ここでは，$y=f'(x)$ のグラフよりも $y=\cos x$ のグラフの方が簡単なので，

$\boxed{f'(x)>0} \iff \dfrac{1}{2}>\cos x \iff$ $y=\cos x$ のグラフが直線 $y=\dfrac{1}{2}$ より $\boxed{\text{下}}$

$\boxed{f'(x)<0} \iff \dfrac{1}{2}<\cos x \iff$ $y=\cos x$ のグラフが直線 $y=\dfrac{1}{2}$ より $\boxed{\text{上}}$

であることを利用するといいでしょう．　←グラフを知っている関数と定数の比較

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\dfrac{\pi}{3}-\sqrt{3}$	$\nearrow$	π



よって，求める最大値は $f(\pi)=\pi$，最小値は $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\pi}{3}-\sqrt{3}$ です．

演習 3・7

(1)　$f(x)=(x+1)^2e^{-x}$ より，

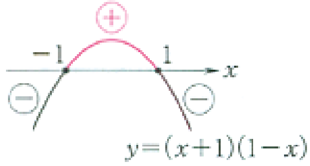
$$\begin{aligned} f'(x)&=2(x+1)e^{-x}+(x+1)^2(-e^{-x})\\ &=(x+1)\{2-(x+1)\}e^{-x}\\ &=(x+1)(1-x)e^{-x}. \end{aligned}$$

$(e^{-x})'=-e^{-x}$.

よって，$f(x)$ の増減は次のようになる．

$e^{-x}>0$ より，$f'(x)$ の符号は $(x+1)(1-x)$ の符号と一致．

x	$(-\infty)$	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	(∞)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	(∞)	↘	0	↗	$\frac{4}{e}$	↘	(0)

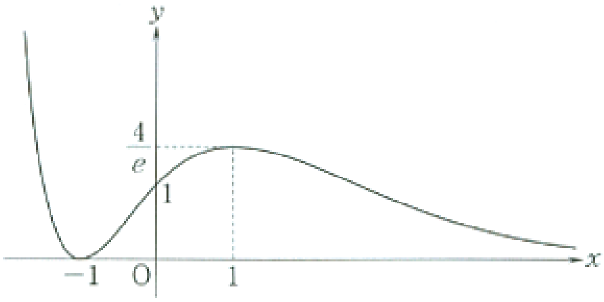


$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^2}{e^x}=0 \quad (\text{問題文より}),$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x+1)^2e^{-x}=\infty.$$

$x\to-\infty$ のとき，$(x+1)^2\to\infty$，$e^{-x}\to\infty$.

したがって，$y=f(x)$ のグラフの概形は次のようになる．



(2)　$f(x)=k$ の実数解は，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=k$ の共有点の x 座標である．

したがって，$f(x)=k$ が異なる2つの実数解をもつ条件は，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=k$ の共有点が2個あることである．

(1)のグラフより，その条件を満たす k の値は，

$$k=\frac{4}{e}.$$