はじめに

この問題集は，数学Ⅰ，A，Ⅱ，B，Ⅲの教科書をひと通り終え，これから本格的に受験勉強を始める理系の受験生を対象としています．

河合出版では，毎年，その年の入試問題の中から厳選された問題を集めた『大学入試攻略数学問題集』を出版していますが，この『大学入試攻略数学問題集』を過去20年以上に渡って精査し，さらに厳選を重ねてこの問題集を作成しました．いわば，この20年間の入試問題の集大成と言えるでしょう．特別な難問や，ありふれた易問を避け，効率よく大学入試に対応できるような問題が262題収録されています．

解答は，なるべくテクニカルなものを避け，できるだけ自然なものを心がけました．ここで提示された解法は，是非とも身につけてもらいたいものばかりです．

また，問題によっては，〈方針〉，〈別解〉，【注】などもつけ，その1題をより深く理解できるようにしました．

なお，問題の主旨を変えない範囲で問題文の表現を変更したものには問題番号に＊が，また，問題の主旨を若干変えたものには出典大学に 改 の字がついています．

この問題集を大いに活用して，ゆるぎない実力が養成されることを期待します．

問題編

目 次

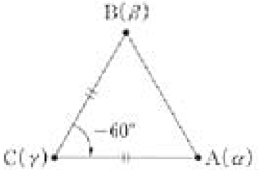
②を代入して，

$$\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}=\frac{1\mp\sqrt{3}\,i}{2}$$
$$=\cos(\mp60^\circ)+i\sin(\mp60^\circ).$$

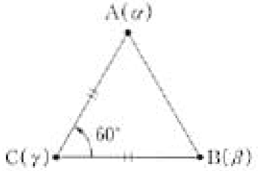
（複号同順）

この式は，点 C(γ) を中心として，点 B(β) を -60° または 60° 回転した点が点 A(α) であることを示すから，△ABC は正三角形で，A，B，C の並び方は，

$\boldsymbol{\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}}$ **のとき，反時計回り，**



$\boldsymbol{\omega=\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}}$ **のとき，時計回り．**



187 ―（方針）

(1) P(z) を A(α) のまわりに θ 回転した複素数を Q(w) とおくと，

$$w-\alpha=(z-\alpha)(\cos\theta+i\sin\theta).$$

(2) P，Q，R を表す複素数をそれぞれ z_P，z_Q，z_R とおいて

$$z_R-z_P=i(z_Q-\alpha)$$

を示す．

(1) F は B を A のまわりに -90° 回転した点であるから，F を表す複素数は，

$$\alpha+(\beta-\alpha)\{\cos(-90^\circ)+i\sin(-90^\circ)\}$$
$$=\alpha+(\beta-\alpha)(-i)$$
$$=\boldsymbol{(1+i)\alpha-i\beta}.$$

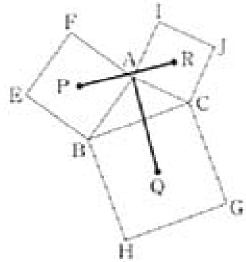
同様にして，H を表す複素数は，

$$\beta+(\gamma-\beta)(-i)=\boldsymbol{(1+i)\beta-i\gamma}.$$

J を表す複素数は，

$$\gamma+(\alpha-\gamma)(-i)=\boldsymbol{(1+i)\gamma-i\alpha}.$$

(2)



P は BF の中点であるから，P を表す複素数を z_P とすると，

$$z_P=\frac{1}{2}\{\beta+(1+i)\alpha-i\beta\}$$
$$=\frac{1}{2}\{(1+i)\alpha+(1-i)\beta\}.$$

同様にして，Q は CH の中点，R は AJ の中点であることから，Q，R を表す複素数をそれぞれ z_Q，z_R とおくと，

$$z_Q=\frac{1}{2}\{(1+i)\beta+(1-i)\gamma\},$$
$$z_R=\frac{1}{2}\{(1+i)\gamma+(1-i)\alpha\}.$$

このとき，

$$z_R-z_P=\frac{1}{2}\{-2i\alpha-(1-i)\beta+(1+i)\gamma\},$$
$$z_Q-\alpha=\frac{1}{2}\{-2\alpha+(1+i)\beta+(1-i)\gamma\}.$$

よって，

$$z_R-z_P=i(z_Q-\alpha)$$

となるから，PR=AQ かつ PR⊥AQ である．

188 ―（方針）

(1) $|z-2|\leqq1$ と $w=iaz$ の表す図形的意味を考えてみる．

(2) 図から読みとる．

(1) z は点 2 を中心とする半径 1 の円の周および内部に存在する．

$\dfrac{\pi}{2}$ の間にある方の角であるから，

$$\tan\theta=|\tan(\alpha_2-\alpha_1)|$$
$$=\left|\frac{\tan\alpha_2-\tan\alpha_1}{1+\tan\alpha_1\tan\alpha_2}\right|$$
$$=\left|\frac{2-a+\frac{a}{2}}{1-\frac{a}{2}(2-a)}\right|$$
$$=\left|\frac{4-a}{a^2-2a+2}\right|$$
$$=\boldsymbol{\frac{4-a}{a^2-2a+2}}.$$

$\left(\begin{array}{l}0<a<4 \text{ より，} 4-a>0.\\ \text{また，} a^2-2a+2=(a-1)^2+1>0.\end{array}\right)$

(2) $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，θ が最大になるのは $\tan\theta\left(=\dfrac{4-a}{a^2-2a+2}\right)$ が最大になるときである．

$$f(a)=\frac{4-a}{a^2-2a+2}$$

とおくと，

$$f'(a)=\frac{-(a^2-2a+2)-(4-a)(2a-2)}{(a^2-2a+2)^2}$$
$$=\frac{a^2-8a+6}{(a^2-2a+2)^2}$$
$$=\frac{\{a-(4-\sqrt{10})\}\{a-(4+\sqrt{10})\}}{(a^2-2a+2)^2}.$$

$0<a<4$ における $f(a)$ の増減は，次のようになる．

a	(0)	$\cdots$	$4-\sqrt{10}$	$\cdots$	(4)
$f'(a)$		$+$	0	$-$	
$f(a)$		↗		↘	

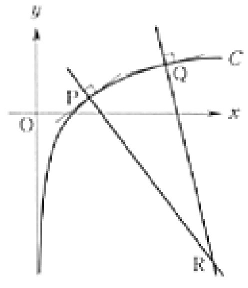
よって，$a=4-\sqrt{10}$ のときに θ は最大になる．

208 ―〈方針〉

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における法線は，

$f'(a)\neq 0$ のとき，
$$y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a).$$
$f'(a)=0$ のとき，
$$x=a.$$

また，
$$\lim_{q\to x}\frac{\log q-\log x}{q-x}=\frac{d}{dx}\log x$$
（$\log x$ の導関数の定義）
$$=\frac{1}{x}.$$



$C: y=\log x$

より，
$$y'=\frac{1}{x}.$$

$\mathrm{P}(p,\ \log p)$ における C の法線は，
$$y-\log p=-p(x-p).$$
すなわち，
$$y=\boxed{-px+p^2+\log p}. \quad \cdots ①$$

$\mathrm{Q}(q,\ \log q)$ における C の法線は，同様にして，
$$y=-qx+q^2+\log q. \quad \cdots ②$$

① と ② の交点 R の x 座標は，①－② より，
$$0=-(p-q)x+p^2-q^2+\log p-\log q$$
となり，
$$x=\boxed{p+q+\frac{\log p-\log q}{p-q}}$$

$q\to p$ とすると，