149(3) 解答の訂正と補充問題

149(3) の解答に誤りがあります．申し訳ありません．

目 次

1.1　どこが間違っているか

解答の初めで

$$a = x_1 \leqq x_2 \leqq x_3 \leqq \cdots . \qquad \cdots(\bigstar)$$

となると述べてあります．それを踏まえて，(3) は次のように解いています．

解答編 p.189

(3)　(2) および (★) より，$-1 < a \leqq x_n < 0$ が成り立つ．

$x_{n+1} = x_n(1 + x_n)$ であるから，

$$|x_{n+1}| = |x_n|(1 + x_n) \leqq |x_n|(1 + a).$$

この「≦」が間違いです．

$$-1 < a \leqq x_n < 0$$

ですから

$$1 + a \leqq 1 + x_n.$$

両辺に $|x_n|(>0)$ をかけると

$$|x_n|(1 + x_n) \geqq |x_n|(1 + a)$$

となります．不等号の向きが逆です．こちらが正しい．

したがって，これ以降の解答は間違っています．(p.190 に載せた **(別解)** は全く違う方法で解いているので正しい．)

解答に付けた次の注釈

一般項が求められない数列 $\{x_n\}$ が収束すると思われるとき $\lim_{n\to\infty} x_n$ を求めるには

(中略)

$$|x_{n+1} - \alpha| \leqq r|x_n - \alpha| \quad (n \geqq 1)$$

(r は $0 < r < 1$ を満たす定数)

を証明する．(以下略)

を教えたいというのが先にあって，これを使う問題と思い込んでしまったのが解答を間違えた原因です．

本問はこの内容を使うものではありませんでした．

1.2　正しい解答

本問は，(1) で $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ を示した方法を参考にして

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = -\infty$$

を示すのがポイントとなります．

【(3) の正しい解答】

(2) と (★) より

$$x_n \leqq x_{n+1} < 0 \qquad \cdots ①$$

$$x_{n+1} = x_n + {x_n}^2$$

の両辺を $x_{n+1}x_n$ で割り

$$\frac{1}{x_n} = \frac{1}{x_{n+1}} + \frac{x_n}{x_{n+1}}$$

$$\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{x_n} - \frac{x_n}{x_{n+1}} \qquad \cdots ②$$

この式変形を思いつくのは無理だな，と言う場合は p.190 の **(別解)** を参照せよ．その方が解答を作りやすいはず．

①より

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} \geqq 1$$

これと②より

$$\frac{1}{x_{n+1}} \leqq \frac{1}{x_n} - 1$$

これを繰り返し用いると

$$\frac{1}{x_n} \leqq \frac{1}{x_1} - (n - 1)$$

よって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=-\infty$$

> この論法は，(1) で $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\infty$ を示したのと同様だ.

したがって

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}x_n=0}$$

■

1.3　補充問題

解答に付けたが使わなかった次の注釈

> 一般項が求められない数列 $\{x_n\}$ が収束すると思われるとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n$ を求めるには
>
> (中略)
>
> $$\boldsymbol{|\,x_{n+1}-\alpha\,|\leqq r|\,x_n-\alpha\,|\quad(n\geqq 1)}$$
>
> **(r は $0<r<1$ を満たす定数)**
>
> を証明する. (以下略)

を実際に使うのが次の 2 問.

問 1. (2018. 名古屋工業大学)

関数 $f(x)=\sqrt{2x+1}$ に対して，数列 $\{a_n\}$ を次で定義する.

$$a_1=3,$$

$$a_{n+1}=f(a_n)\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

方程式 $f(x)=x$ の解を α とおく. 次の問いに答えよ.

(1) 自然数 n に対して，$a_n>\alpha$ が成り立つことを示せ.

(2) 自然数 n に対して，

$$a_{n+1}-\alpha<\frac{1}{2}(a_n-\alpha)$$

が成り立つことを示せ.

(3) 数列 $\{a_n\}$ が収束することを示し，その極限値を求めよ.

問 2. (2016. 首都大学東京)

a と b を

$$0\leqq a\leqq 1,\quad 0\leqq b<1$$

を満たす定数とする. 数列 $\{a_n\}$ を次の条件によって定める.

$$a_1=a,$$

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}({a_n}^2+b)\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

$c=1-\sqrt{1-b}$ とおく.

(1) $0\leqq a_n\leqq 1$ が成り立つことを示しなさい.

(2) $a_{n+1}-c=\dfrac{1}{2}(a_n+c)(a_n-c)$ が成り立つことを示しなさい.

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=c$ が成り立つことを示しなさい.

149(3) の解答に現れた「$-\infty$ に発散する数列を利用」を使うのが次の問題.

問 3. (2019. 徳島大学)

定数 α を $\dfrac{1}{2}<\alpha<1$ とする. 数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1=\alpha,$$

$$a_{n+1}=2\int_0^1|\,t-a_n\,|\,dt\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

によって定められている. 次の問いに答えよ.

(1) 定数 x を $0<x<1$ とする. 定積分 $\displaystyle\int_0^1|\,t-x\,|\,dt$ を求めよ.

(2) $\dfrac{1}{2}<a_n<1$ が成り立つことを示せ.

(3) 自然数 n に対して，$b_n=\log\left(a_n-\dfrac{1}{2}\right)$ とおく. b_n を n と α を用いて表せ.

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ の値を求めよ.

---

p.190 で紹介した「実数についての定理」を使うのが次の問題.

問 4. (2019. 福島県立医科大学)

正の定数 a について

$$a_1=a,\quad a_{n+1}=a^{a_n}$$

により，数列 $\{a_n\}$ を定める．

また，関数 $y = x^{\frac{1}{x}}$ $(x > 0)$ の最大値を b とする．以下の問いに答えよ．ただし，e を自然対数の底とする．

(1) 関数 $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\log x$ $(x > 0)$ の最大値を求めよ．

(2) 関数 $y = x^{\frac{1}{x}}$ の増減，漸近線を調べて，グラフの概形をかけ．

(3) $1 \leqq a \leqq b$ であるとき，すべての自然数 n について，不等式 $a \leqq a_n \leqq a_{n+1} \leqq e$ が成立することを示せ．

(4) $a = \sqrt{2}$ について，極限値 $l = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．ただし，極限値 l が存在することは仮定してよい．

1.4 補充問題の解答

問 1.

(1) $f(\alpha) = \alpha$ より

$$\sqrt{2\alpha+1} = \alpha$$

この α が，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ を予想したものだと，この後の設問で分かる．

よって

$$2\alpha + 1 = \alpha^2 \text{ かつ } \alpha \geqq 0$$

したがって

$$\alpha = 1 + \sqrt{2}$$

$f(x)$ は単調増加なので, $a_k > \alpha$ ならば,

$$f(a_k) > f(\alpha)$$

が成り立ち，つまり

$$a_{k+1} > \alpha$$

となる．

これと，$a_1 = 3 > \alpha$ より，帰納的に

$$a_n > \alpha$$

となる． (証明終)

(2)

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \alpha &= \sqrt{2a_n+1} - \sqrt{2\alpha+1} \\ &= \boxed{\frac{2}{\sqrt{2a_n+1}+\sqrt{2\alpha+1}}}\,(a_n - \alpha) \end{aligned}$$

$\cdots$①

灰色の部分 $< \dfrac{1}{2}$ を示そう．

(1) より，$a_n > \alpha$ であるから

$$\begin{aligned} &\frac{2}{\sqrt{2a_n+1}+\sqrt{2\alpha+1}} \\ <&\frac{2}{\sqrt{2\alpha+1}+\sqrt{2\alpha+1}} \\ <&\frac{2}{\alpha+\alpha} \\ =&\frac{1}{\alpha} \\ =&\frac{1}{1+\sqrt{2}} \\ <&\frac{1}{2} \end{aligned}$$

これと①より

$$a_{n+1} - \alpha < \frac{1}{2}(a_n - \alpha)$$

(証明終り)

これが

$$|\boldsymbol{x_{n+1} - \alpha}| \leqq \boldsymbol{r}|\boldsymbol{x_n - \alpha}|$$

($\boldsymbol{r}$ は $\boldsymbol{0 < r < 1}$ を満たす定数)

に相当するものである．

(3) (1)，(2) より $n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} 0 < a_n - \alpha &< \frac{1}{2}(a_{n-1} - \alpha) \\ &< \left(\frac{1}{2}\right)^2 (a_{n-2} - \alpha) \\ &\ \ \vdots \\ &< \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (a_1 - \alpha) \end{aligned}$$

$n \to \infty$ とすると (右辺) $\to \infty$ となるから，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - \alpha) = 0$$

つまり

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha = 1 + \sqrt{2}}$$

問 2.

(1)

$$\begin{cases} a_1 = a, \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2}({a_n}^2 + b) \end{cases} \qquad \cdots ①$$

$$(0 \leqq a \leqq 1, \quad 0 \leqq b < 1)$$

を満たしている．

すべての自然数 n に対して

$$0 \leqq a_n \leqq 1 \qquad \cdots ②$$

となることを数学的帰納法により示す．

漸化式①を使って証明するのだから数学的帰納法がピッタリだ．

(I) $n = 1$ のとき，②は成り立つ．

(II) $n = k$ のとき，②が成り立つと仮定する．すなわち

$$0 \leqq a_k \leqq 1$$

このとき，

$$a_{k+1} = \frac{1}{2}({a_k}^2 + b)$$

より

$$\frac{b}{2} \leqq a_{k+1} \leqq \frac{1}{2}(1 + b)$$

$0 \leqq b < 1$ であるから

$$0 \leqq a_{k+1} < \frac{1+1}{2} = 1$$

となり，$n = k + 1$ のときも②は成り立つ．

以上より，すべての自然数 n について

$$0 \leqq a_n \leqq 1$$

が成り立つ．（証明終り）

(2) $c = 1 - \sqrt{1-b}$ より

$$(c-1)^2 = (\sqrt{1-b})^2$$

$$c^2 - 2c + 1 = 1 - b$$

よって

$$c = \frac{1}{2}(c^2 + b) \qquad \cdots ③$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = c$ と**予想**すると，①で $n \to \infty$ として③が得られる．つまり，c は極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を予想したものだったのだ．

ただし，③ を満たす c は 2 つ存在し，そのどちらが適切なのか受験生に選ばせるのはハードルが高いから，この問題では $c = 1 - \sqrt{1-b}$ を与えていたのだ．

③を導くのが難しいなら，**(別解)** を見よ．

① − ③ より

$$a_{n+1} - c = \frac{1}{2}({a_n}^2 - c^2)$$
$$= \frac{1}{2}(a_n + c)(a_n - c) \qquad \cdots ④$$

（証明終り）

(別解)

$c = 1 - \sqrt{1-b}$ より

$$(c-1)^2 = (\sqrt{1-b})^2$$

$$c^2 - 2c + 1 = 1 - b$$

（ここまでは先ほどの解答と同じ）

よって

$$b = 2c - c^2$$

示したい式には b が邪魔だから，b を c の式で表せばよい．

これと①より

$$a_{n+1} - c = \frac{1}{2}({a_n}^2 + 2c - c^2) - c$$
$$= \frac{1}{2}({a_n}^2 - c^2)$$
$$= \frac{1}{2}(a_n + c)(a_n - c)$$

（別解終り）

(3)

ポイント

目標は

$$|\boldsymbol{a_{n+1}-c}| \leqq \boldsymbol{r}|\boldsymbol{a_n-c}| \quad (\boldsymbol{n \geqq 1})$$

($\boldsymbol{r}$ は $\boldsymbol{0<r<1}$ を満たす定数)

という不等式だ.

これと, (2) で示した不等式を比べて

$$\frac{1}{2}(a_n+c)$$

の部分に注目しよう. この式の値より大きい定数 r で, $0<r<1$ を満たすものを求めよう.

$0 \leqq a_n \leqq 1$ より

$$\frac{1}{2}(a_n+c) \leqq \underbrace{\frac{1}{2}(1+c)}_{r\,\text{とする.}} \qquad \cdots⑤$$

$0 \leqq b < 1$ より

$$0 < \sqrt{1-b} \leqq 1$$

となり

$$0 \leqq 1-\sqrt{1-b} < 1$$

つまり

$$0 \leqq c < 1$$

よって

$$0 < r < \frac{1}{2}(1+1) = 1 \qquad \cdots⑥$$

$0<r<1$ が示せた！

④ より

$$\begin{aligned}|a_{n+1}-c| &= \frac{1}{2}(a_n+c)|a_n-c| \\ &\leqq r|a_n-c| \quad (⑤より)\end{aligned}$$

これを繰り返し用いると

$$\begin{aligned}|a_n-c| &\leqq r|a_{n-1}-c| \\ &\leqq r^2|a_{n-2}-c| \\ &\ \ \vdots \\ &\leqq r^{n-1}|a_1-c|\end{aligned}$$

$n\to\infty$ とすると, ⑥より右辺は 0 に収束するので, はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty} a_n = c$$

(証明終り)

問 3.

(1)

ポイント

$$\int_0^1 |t-x|\,dt$$

を計算するには,

$$|t-x|=0$$

となる積分変数 t で積分区間を分ける. つまり, $t=x$ で積分区間を分ける.

すると絶対値が外しやすくなるからだ.

$0<x<1$ より

$$\begin{aligned}&\int_0^1 |t-x|\,dt \\ =&\int_0^x |\underbrace{t-x}_{\text{これは負}}|\,dt + \int_x^1 |\underbrace{t-x}_{\text{これは正}}|\,dt \\ =&\int_0^1 (x-t)\,dt + \int_x^1 (t-x)\,dt \\ =&\left[xt-\frac{1}{2}t^2\right]_0^x + \left[\frac{1}{2}t^2-xt\right]_x^1 \\ =&\boldsymbol{x^2-x+\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

(2) すべての自然数 n に対して

$$\frac{1}{2} < a_n < 1 \qquad \cdots①$$

となることを数学的帰納法により証明する.

(I) $n=1$ のとき, ①は成り立つ.

(II) $n=k$ のとき, ①は成り立つと仮定する.

つまり

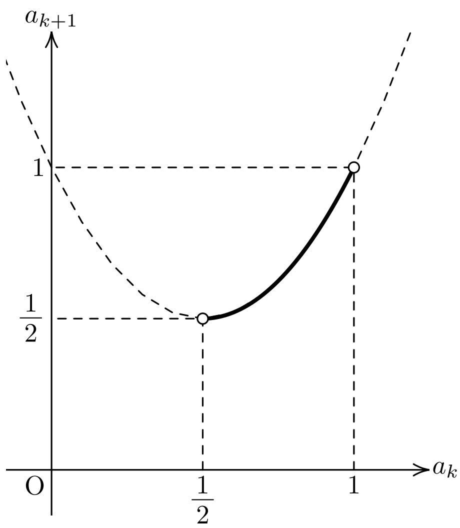
$$\frac{1}{2} < a_n < 1$$

であり，(1) の結果を用いて

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2\int_0^1 |\,t - a_k\,|\,dt \\ &= 2\left(a_k{}^2 - a_k + \frac{1}{2}\right) \\ &= 2\left(a_k - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$\cdots$②

グラフは次のようになる．



グラフより

$$\frac{1}{2} < a_{k+1} < 1$$

も成り立つ．

以上から，すべての自然数 n に対して

$$\frac{1}{2} < a_n < 1$$

となる．　(証明終り)

(3) ②より

$$a_{n+1} - \frac{1}{2} = 2\left(a_n - \frac{1}{2}\right)^2$$

両辺の自然対数を取って

$$\begin{aligned} \log\left(a_{n+1} - \frac{1}{2}\right) &= \log 2\left(a_n - \frac{1}{2}\right)^2 \\ &= 2\log\left(a_n - \frac{1}{2}\right) + \log 2 \end{aligned}$$

よって

$$b_{n+1} = 2b_n + \log 2$$

したがって

$$b_{n+1} + \log 2 = 2(b_n + \log 2)$$

数列 $\{b_{n+1} + \log 2\}$ は公比が 2, 初項が

$$\begin{aligned} b_1 + \log 2 &= \log\left(a_1 - \frac{1}{2}\right) + \log 2 \\ &= \log\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) + \log 2 \\ &= \log(2\alpha - 1) \end{aligned}$$

の等比数列となるから

$$b_n + \log 2 = 2^{n-1}\log(2\alpha - 1)$$

よって

$$\boldsymbol{b_n = 2^{n-1}\log(2\alpha - 1) - \log 2}$$

(4) $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ より

$$0 < 2\alpha - 1 < 1$$

よって

$$\log(2\alpha - 1) < 0$$

これと (3) の結果から

$$\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty \qquad \cdots③$$

一方

$$b_n = \log\left(a_n - \frac{1}{2}\right)$$

より

$$e^{b_n} = a_n - \frac{1}{2}$$

$$a_n = e^{b_n} + \frac{1}{2}$$

これと③より

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}}$$

問 4.

(1) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\log x$ $(x > 0)$ について

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\dfrac{1}{x}\cdot\sqrt{x} - \log x\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x} \\ &= \frac{2 - \log x}{2x\sqrt{x}} \end{aligned}$$

したがって，増減は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	e^2	$\cdots$
y'		$+$	0	$-$
y		$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\searrow$

よって，求める最大値は $\boldsymbol{\dfrac{2}{e}}$

(2)

ポイント

$y=f(x)^{g(x)}$ の形の関数を微分するには，対数を取ってから

$$(\log y)'=\frac{y'}{y}$$

を利用しよう (**対数微分法**)．この方が計算しやすいはずだ．

$y=x^{\frac{1}{x}}$ $(x>0)$ について

$$\log y=\frac{\log x}{x}$$

x で微分して

$$\frac{y'}{y}=\frac{1-\log x}{x^2}$$

よって

$$y'=\frac{1-\log x}{x^2}x^{\frac{1}{x}}$$

したがって，増減は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$
y'		$+$	0	$-$
y		$\nearrow$	$e^{\frac{1}{e}}$	$\searrow$

最大値は

$$\underline{b=e^{\frac{1}{e}}}$$

$x>1$ のとき，(1) より

$$0<\frac{\log x}{\sqrt{x}}\leqq\frac{2}{e}$$

(1) を利用して極限を求めよう．「$0<\dfrac{\log x}{x}$」としたいので，「$x>1$ のとき」とするのを忘れないように．

よって

$$0<\frac{\log x}{x}\leqq\frac{2}{e\sqrt{x}}$$

$x\to\infty$ とすると，(右辺) $\to 0$ となるからはさみうちの原理より

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log y=0$ となるから

$$\lim_{x\to\infty}y=1$$

よって，**直線 $y=1$ が漸近線である．**

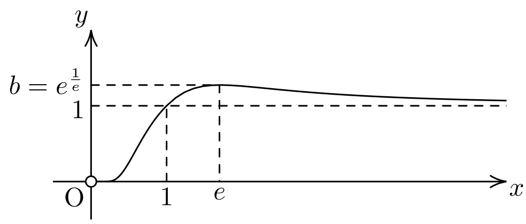
また

$$\lim_{x\to+0}\log y=\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{x}=-\infty$$

となるから

$$\lim_{x\to+0}y=0$$

以上より，$y=x^{\frac{1}{x}}$ のグラフの概形は次のようになる．



(3) $1\leqq a\leqq b=e^{\frac{1}{e}}$ とする．

このとき，すべての自然数 n について

$$a\leqq a_n\leqq e \qquad \cdots①$$

となることを数学的帰納法により示す．

a_n の一般項は求められないから漸化式を利用して証明するしかない．したがって，数学的帰納法を用いる．

(I) $n=1$ のときは

$$a_1=a\leqq e^{\frac{1}{e}}<e^1=e$$

となり，①は成立．

(II) $n=k$ のとき，①が成り立つと仮定する．

つまり

$$a\leqq a_k\leqq e$$

$a\geqq 1$ より

$$\begin{aligned}a_{k+1}=a^{a_k}&\geqq a^a\\&\geqq a^1\\&=a\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
a_{k+1} = a^{a_k} &\leqq a^e \\
&\leqq \left(e^{\frac{1}{e}}\right)^e \\
&= e^1 \\
&= e
\end{aligned}
$$

よって，$n = k+1$ のときも①は成り立つ．

以上より，すべての自然数 n に対して

$$a \leqq a_n \leqq e$$

となる．

また，

$$
\begin{aligned}
a_2 &= a^{a_1} \\
&= a^a \\
&\geqq a^1 \\
&= a_1
\end{aligned}
$$

となるから

$$a_3 = a^{a_2} \geqq a^{a_1} = a_2$$

以下同様にして

$$a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq a_4 \leqq \cdots$$

となることがわかる．

以上より

$$a \leqq a_n \leqq a_{n+1} \leqq e$$

が成立する．　(証明終り)

(4) $1 < 2 < e$ であるから，(2) の $y = x^{\frac{1}{x}}$ のグラフより

$$1 < 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} < e^{\frac{1}{e}}$$

となる．

(3) よりすべての自然数 n に対して

$$\sqrt{2} \leqq a_n \leqq a_{n+1} \leqq e$$

が成り立ち，極限値 $l = \lim_{n\to\infty} a_n$ は

$$\sqrt{2} \leqq l \leqq e$$

を満たす．(注．この極限値 l が存在することを保証するのが，**p.190 で紹介した定理**である．)

$a = \sqrt{2}$ のとき

$$a_{n+1} = a^{a_n} = \sqrt{2}^{a_n}$$

$n \to \infty$ とすると

$$l = \sqrt{2}^l$$

よって

$$l^{\frac{1}{l}} = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} \qquad \cdots ②$$

区間 $\sqrt{2} \leqq x \leqq e$ において $y = x^{\frac{1}{x}}$ は単調増加であったから②を満たすのは

$$\boldsymbol{l = 2}$$

のみである．